BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Code sujet : 284**

**Conception : HEC Paris - ESSEC**

---

# MATHÉMATIQUES

Programme ENS B/L

Lundi 9 mai 2022, de 8 h. à 12 h.

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---

## EXERCICE 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n$ et $h_n$ respectivement, les fonctions définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall x > -1, \quad f_n(x) = x^n \ln(1+x) \qquad \text{et} \qquad \forall x > -1, \quad h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $h_n$ sur son ensemble de définition.
2. (a) Montrer que l'équation $h_n(x) = 0$ d'inconnue $x$, admet sur $]-1,+\infty[$ une unique solution $x_0$ que l'on déterminera.
   (b) En déduire le signe de la fonction $h_n$ sur $]-1,+\infty[$.
3. *Dans cette question, on étudie le cas particulier où $n = 1$.*
   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction $f_1$ sur son ensemble de définition.
   (b) Préciser les limites de $f_1$ aux bornes de son ensemble de définition.
4. *Dans cette question, on étudie le cas général où $n \geq 2$.*
   (a) On note $f_n'$ la dérivée de la fonction $f_n$.
   Exprimer pour tout $x > -1$, $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   (b) En distinguant les cas $n$ impair et $n$ pair, en déduire les variations de la fonction $f_n$ sur $]-1,+\infty[$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera, tel que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \frac{x^2}{1+x} = ax+b+\frac{c}{1+x}$$

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2) - \frac{1}{2}$. En déduire la valeur de $u_1$.

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

   (d) Établir l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$$

   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

   (a) Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

   (b) En déduire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

# EXERCICE 2

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$.

Pour tout réel strictement positif $\theta$ et tout réel strictement positif $s$, soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{s}\exp\left(-\left(\dfrac{t-\theta}{s}\right)\right) & \text{si } t \geq \theta \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que la fonction $f$ est une densité de probabilité.
   Dans tout l'exercice, on note $X$ une variable aléatoire à valeurs positives admettant $f$ comme densité.
   On dit que $X$ **suit la loi exponentielle translatée de paramètres** $(\theta, s)$.
2. (a) Soit $F_X$ la fonction de répartition de $X$. Calculer, pour tout $x$ réel, $F_X(x)$.
   (b) Soit $q \in ]0,1[$. Calculer, en fonction de $\theta$ et de $s$, le quantile d'ordre $q$ de $X$.
3. On pose $Y = X - \theta$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de $Y$ et reconnaître la loi de $Y$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X$ en fonction de $\theta$ et de $s$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère, pour tout entier naturel non nul, $n$ variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et de même loi que $X$.
On pose $M_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $T_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, si bien que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad M_n(\omega) = \max\big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big)$$

et

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T_n(\omega) = \min\big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big)$$

On admet que $M_n$ et $T_n$ sont des variables aléatoires à densité définies sur $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$.
On note respectivement $F_{M_n}$ et $F_{T_n}$ les fonctions de répartition de $M_n$ et de $T_n$.
On rappelle les deux égalités d'événements suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [M_n \leq x] = [X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \cdots \cap [X_n \leq x]$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [T_n \geq x] = [X_1 \geq x] \cap [X_2 \geq x] \cap \cdots \cap [X_n \geq x]$$

4. (a) Calculer $F_{M_n}(x)$ et $F_{T_n}(x)$ pour tout $x$ réel.
   Montrer que $T_n$ suit une loi exponentielle translatée dont on précisera les paramètres.
   (b) Déduire de la question précédente et de la question 3. (b) l'espérance $\mathbb{E}(T_n)$ et la variance $\mathbb{V}(T_n)$ de $T_n$ sans calculs.
5. Dans cette question, on considère le cas particulier où $n = 2$.
   On admet sans démonstration que $E(M_2) = \theta + \frac{3}{2}s$ et $V(M_2) = \frac{5}{4}s^2$.
   (a) Montrer que $M_2 T_2 \leq \frac{1}{2}(M_2^2 + T_2^2)$ et en déduire l'existence de la covariance $\mathrm{cov}(M_2, T_2)$ des variables aléatoires $M_2$ et $T_2$.
   (b) À l'aide des définitions de la variance et de la covariance, redémontrer la formule suivante :
   $$\mathbb{V}(M_2 + T_2) = \mathbb{V}(M_2) + \mathbb{V}(T_2) + 2\,\mathrm{cov}(M_2, T_2)$$
   (c) Justifier l'égalité suivante : $M_2 + T_2 = X_1 + X_2$.
   En déduire la valeur de $\mathrm{cov}(M_2, T_2)$.
   (d) On note $\mathrm{cor}(M_2, T_2)$ le coefficient de corrélation de $M_2$ et $T_2$. Calculer $\mathrm{cor}(M_2, T_2)$.
6. On suppose dans cette question que le paramètre $s$ est connu et que $s < 1$.
   Soit $\alpha$ un réel de $]0,1[$.
   On pose, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $Z_k = X_k - s$ et $\overline{Z_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

(a) Calculer l'espérance et la variance de $\overline{Z_n}$.

(b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\theta \in \left[\overline{Z_n} - \frac{1}{\sqrt{n\alpha}}, \overline{Z}_n + \frac{1}{\sqrt{n\alpha}}\right]\right) \geq 1 - \alpha$$

# PROBLÈME

Dans ce problème, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 3.
On note $\Omega$ l'ensemble des matrices $M$ carrées réelles $n \times n$, uniquement constituées de 0 et de 1.
Plus formellement, une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ appartient à $\Omega$ si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad m_{i,j} \in \{0,1\}$$

Soit $k \in [\![2,n-1]\!]$. On dira qu'une matrice $M$ de $\Omega$ *possède la croix d'indice* $k$ si elle est de la forme :

$$M = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} & & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & & 1 & & \\ & & & & \end{pmatrix} & \longleftarrow k^{\text{e}} \text{ ligne} \\ \uparrow & \\ k^{\text{e}} \text{ colonne} & \end{array}$$

les autres coefficients de $M$ non représentés valant 0 ou 1.
Plus formellement, une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\Omega$ possède la croix d'indice $k \in [\![2,n-1]\!]$ si et seulement si :

$$m_{k-1,k} = m_{k,k} = m_{k+1,k} = m_{k,k-1} = m_{k,k+1} = 1$$

Dans la première partie, on détermine les valeurs de $n$ pour lesquelles une matrice particulière de $\Omega$ possédant une croix, n'admet que des valeurs propres entières.
Dans la seconde partie, on s'intéresse à une fonction de seuil, du point de vue des probabilités, concernant les matrices de $\Omega$ possédant une croix.
On confondra une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec le vecteur de $\mathbb{R}^n$ correspondant : la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sera confondue avec le vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
On note $e_i$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la seule composante non nulle vaut 1 et est située au rang $i$ :

$$e_i = (\, 0 \,,\, 0 \,, \ldots,\, 0 \,,\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rang } i}}{1} \,,\, 0 \,, \ldots,\, 0 \,)$$

On rappelle que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

**Les deux parties de ce problème sont indépendantes.**

# *Partie I - Valeurs propres d'une matrice croix particulière*

## *A - Étude d'un exemple*

Dans cette section A, on suppose que $n = 3$ et on s'intéresse à la matrice $M_3$ de $\Omega$ possédant la croix d'indice 2 suivante :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner sans démonstration le rang de $M_3$.
2. Déterminer une base du noyau de la matrice $M_3$.
3. En déduire une première valeur propre de $M_3$ et une base du sous-espace propre associé.
4. Montrer que $-1$ et $2$ sont des valeurs propres de la matrice $M_3$ et donner des bases des sous-espaces vectoriels propres associés.
5. Justifier que la matrice $M_3$ est diagonalisable et donner une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $M_3 = PDP^{-1}$.

## *B - Généralisation*

Dans cette section B, on revient au cas général où $n$ est un entier supérieur ou égal à 3.
Soit $M_n$ la matrice de $\Omega$ possédant la croix d'indice 2 suivante :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Plus formellement, $M_n = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec :

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2 \text{ ou si } j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6. Donner sans démonstration le rang de $M_n$.
7. Déterminer la dimension du noyau de $M_n$ et en déduire une première valeur propre de $M_n$.
8. On pose $e'_1 = (1,1,\ldots,1) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.
   Montrer que $(e'_1, e_2)$ forme une base de l'image de $M_n$.
9. Montrer qu'un vecteur propre de $M_n$ associé à une valeur propre non nulle est nécessairement dans l'image de $M_n$.
10. On rappelle que $e'_1$ a été défini dans la question 8. Soient $\alpha$ et $\lambda$ deux réels.
    Montrer que le vecteur $e'_1 + \alpha e_2$ est vecteur propre de $M_n$ associé à la valeur propre $\lambda$ si et seulement si :
    $$\lambda = \alpha + 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda^2 - \lambda - n + 1 = 0$$
11. Discuter, suivant les valeurs de $t$ réel, le nombre de solutions de l'équation suivante d'inconnue réelle $\lambda$ :
    $$\lambda^2 - \lambda - t + 1 = 0$$

12. En déduire que $M_n$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
13. Montrer que toutes les valeurs propres de $M_n$ sont dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs si et seulement si $n$ est de la forme $n = 1 + r(r-1)$ où $r$ est un entier relatif.
14. Quelles sont les trois premières valeurs de $n \geq 3$ pour lesquelles $M_n$ ne possède que des valeurs propres appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ ?
15. On suppose que $n = 1 + r(r-1)$ avec $r$ entier supérieur ou égal à 2.
    Déterminer les valeurs propres de $M_n$ et donner une base de chaque sous-espace propre de $M_n$.

# *Partie II - Un espace probabilisé de matrices et une fonction de seuil*

Dans cette partie, $p$ et $q$ sont des réels de l'intervalle $]0,1[$ tels que $p+q=1$.
On suppose qu'il existe un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$ tel que pour chaque matrice de $\Omega$, la valeur 1 d'un coefficient apparaît avec la probabilité $p$ et la valeur 0 d'un coefficient apparaît avec la probabilité $q$, deux coefficients différents prenant les valeurs 0 ou 1 avec indépendance.
Les événements élémentaires sont donc constitués des matrices de $\Omega$.

## *A - Étude d'un exemple*

Dans cette section A, on suppose que $n = 3$ : les matrices considérées sont donc des matrices $3 \times 3$.

16. Si $p \neq q$, exhiber deux matrices de $\Omega$ n'ayant pas la même probabilité.

Ceci justifie que si $p \neq q$, on n'est pas dans le cas de l'équiprobabilité.

17. Montrer que la probabilité qu'une matrice de $\Omega$ choisie au hasard possède la croix d'indice 2 est égale à $p^5$.
18. Dans cette question, on désigne par $Y$ la variable aléatoire définie sur $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$ représentant le nombre de croix qu'une matrice de $\Omega$ peut posséder. Justifier que la variable aléatoire $Y$ suit une loi de Bernoulli et donner son espérance et sa variance.

## *B - Une fonction de seuil*

Dans cette section B, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 5, on note $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des matrices de $\Omega$ possédant au moins une croix.

Jusqu'à la fin de ce problème, on ne suppose plus le réel $p$ constant mais on suppose qu'il dépend de la taille des matrices de $\Omega$. On notera $p_n$ ce réel.

On cherche à déterminer une suite $(t_n)_{n\geq 5}$, dite *fonction de seuil*, telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(M \in \mathscr{C}_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{t_n} = 0 \\ 1 & \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{t_n} = +\infty \end{cases}$$

Pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, on note $X_k$ la variable aléatoire définie sur $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$ valant 1 si la croix d'indice $k$ est présente et 0 sinon et on note $X = \sum\limits_{k=2}^{n-1} X_k$.

19. Que représente la variable aléatoire $X$ ?

20. Montrer que pour tout entier $k \in [\![2, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = (p_n)^5$.
21. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire $X$.
22. Rappeler l'inégalité de Markov concernant la variable aléatoire $X$et en déduire que :

$$\mathbb{P}(M \in \mathscr{C}_n) \leq (n-2)(p_n)^5$$

23. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(p_n \sqrt[5]{n}\right) = 0$.
Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(M \in \mathscr{C}_n) = 0$.
24. Pour $k \in [\![2, n-2]\!]$, déterminer la covariance de $X_k$ et $X_{k+1}$ notée $\operatorname{cov}(X_k, X_{k+1})$, et en déduire que les variables aléatoires $X_k$ et $X_{k+1}$ ne sont pas indépendantes.
25. Justifier que si $(i, j) \in [\![2, n-2]\!]^2$ avec $i < j-1$, alors les variables aléatoires $X_i$ et $X_j$ sont indépendantes.
26. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev concernant la variable aléatoire $X$ et en déduire que :

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\left(\mathbb{E}(X)\right)^2}$$

où $\mathbb{V}(X)$ désigne la variance de la variable aléatoire $X$.

On **admet** la formule suivante :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=2}^{n-1} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n-1} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

27. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(p_n \sqrt[5]{n}\right) = +\infty$.
Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X = 0) = 0$ puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(M \in \mathscr{C}_n) = 1$.
28. Donner un exemple de fonction de seuil $(t_n)_{n \geq 5}$ définie au début de cette section B.

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1126 – D'après documents fournis