Copie anonyme - n°anonymat : 408084

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 12	Session : 2022

Z5-00390 408084 Maths B/L

Épreuve de : MATHÉMATIQUES.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 1 :

1) $h_n'(x) = n\frac{1}{1+x} + \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = n\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ sur $]-1;+\infty[$.

x	-1		$+\infty$
$h_n'(x)$	$\|\|$	$+$	
$h_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to -1} h_n(x) = -\infty$

2) a) La fonction h_n est continue, strictement croissante sur $]-1;+\infty[$
Elle réalise donc une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$.
De plus, $0 \in]-\infty;+\infty[$ donc elle admet une unique solution x_0 à l'équation $h_n(x)=0$, avec $x_0 \in]-1;+\infty[$.
$x_0 = 0$. Donc $h_n(0) = 0$.

b)

x	-1		0		$+\infty$
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	

3) a) Soit $n = 1$. $f_1(x) = x\ln(1+x)$ $\forall x \in]-1;+\infty[$
$f_1'(x) = \ln(1+x) + x\frac{1}{1+x}$

x	-1		0		$+\infty$
$f_1'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -1} f_1(x) = +\infty$
car $\lim\limits_{x\to -1} \ln(1+x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x) = +\infty$.

4 a) Soit $n \geqslant 2$

$$\forall x > -1, \quad f_n'(x) = n x^{n-1} \ln(1+x) + x^n \frac{1}{1+x}$$

$$= x^n \left(\frac{1}{x} n \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right)$$

$$= x^n \left(\frac{1}{x} \left(n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right) \right)$$

$$= x^{n-1} \times h_n(x).$$

b) Soit n pair. Alors x^{n-1} est impair. Dans ce cas là, $h_n(x)$ étant négative sur $]-1;0]$, alors $f_n'(x)$ est positive donc f_n est croissant.
En raisonnant de même, on obtient le résultat suivant.

Avec n pair :

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Avec n impair :

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$+$	0	$+$	
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

5) a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. $\forall x \in [0;1]$:

$$ax + b + \frac{c}{1+x} = \frac{ax(x+1) + b(x+1) + c}{1+x} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{1+x}$$

On cherche alors a, b et c tq $ax^2 + (a+b)x + b + c = x^2$
Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ (a+b) = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \text{ donc } \frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

b) $$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 1\,dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 1 + \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$

$u_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$ Par IPP.

$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$

c) $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx - \int_0^1 f_n(x)\,dx$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0;1]$

$= \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right) dx$

$= \int_0^1 \left(x^{n+1}\ln(1+x) - x^n \ln(1+x)\right) dx$

$= \int_0^1 \left(\ln(1+x)\left(x^{n+1} - x^n\right)\right) dx$

$= \int_0^1 \left(\ln(1+x)\, x^n (x-1)\right) dx$

Comme $x \in [0;1]$, $\ln(1+x) \geqslant 0$, $x^n \geqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$

donc $\left(\ln(1+x)\, x^n (x-1)\right) \leq 0$

De plus, les bornes sont dans le bon sens, donc l'intégrale est négative, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Or, $f_n(x)$ selon les questions précédentes est positive sur $[0;1]$ donc l'intégrale est positive, ainsi $(u_n) \geqslant 0$.
La suite (u_n) est minorée et décroissante, donc elle converge

d) Par récurrence :
INITIALISATION : $u_1 = \frac{1}{4}$ et $0 \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \frac{\ln 2}{2}$. Donc la propriété est vraie pr $n=1$.
HÉRÉDITÉ : soit k fixé dans n tq $0 \leqslant u_k \leqslant \frac{\ln(2)}{k+1}$. Mq $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{\ln 2}{k+2}$

Selon le théorème d'encadrement, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$,
Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

6) a) $\forall x \in [0;1]$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k$

$$= \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

b) Il semble qu'en cherchant une primitive de $S_n(x)$ avec $x = 1$ on peut obtenir l'égalité.
En primitivant de chaque côté de la relation établie en 6a), on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \, dx.$

c) Mq $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$\leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant \int_0^1$

Copie anonyme - n°anonymat : 408084

Code épreuve : 284	**Nombre de pages :** 12	**Session :** 2022

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

EXERCICE 2 :

1) • $f(t)$ est continue sauf peut-être en un nombre fini de points sur $\mathbb{R}$ (peut-être en 0).

• $f(t)$ est positive par produit de fonction positives $(s>0)$.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt. = \int_0^{+\infty} \frac{1}{s} e^{-\left(\frac{t-\theta}{s}\right)} dt$

On calcule : $\displaystyle - \int_0^A -\frac{1}{s} e^{-\left(\frac{t-\theta}{s}\right)} dt = -\left[e^{-\left(\frac{t-\theta}{s}\right)}\right]_0^A = -e^{-\left(\frac{A-\theta}{s}\right)} + e^{\frac{\theta}{s}}$

$\displaystyle = -e^{-\frac{A}{s}+\frac{\theta}{s}} + e^{\frac{\theta}{s}} = e^{\frac{\theta}{s}}\left(-e^{-\frac{A}{s}}+1\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} e^{\frac{\theta}{s}}$

On suppose une erreur de calcul ou bien que $e^{\frac{\theta}{s}} = 1$ pour que $f(t)$ soit une densité pour la suite de l'exercice.

2a) $\displaystyle F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{s} e^{-\left(\frac{t-\theta}{s}\right)}$

$\displaystyle = -\int_0^x -\frac{1}{s} e^{-\left(\frac{t-\theta}{s}\right)} = -\left[e^{-\left(\frac{t-\theta}{s}\right)}\right]_0^x = -e^{-\left(\frac{x-\theta}{s}\right)} + e^{\frac{\theta}{s}}$

$$F_X(x) = \begin{cases} -e^{-\left(\frac{x-\theta}{s}\right)} + e^{\frac{\theta}{s}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b)

3a) $Y = X - \theta$. $\quad \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(X - \theta \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x - \theta)$.

$F_Y(x) = \begin{cases} \\ \end{cases}$

4a) $F_{M_n}(x) = \mathbb{P}(M_n \leqslant x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right)$

$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant x)$ par indépendance

$= \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \left[-e^{-\frac{(x-\theta)}{5}} + e^{\frac{\theta}{5}}\right] & \text{si } x > \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$F_{T_n}(x) = \mathbb{P}(T_n \geqslant x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [T_n \geqslant x]\right).$

5b) $V(M_2 + T_2) = E((M_2 + T_2)^2) - E(M_2 + T_2)^2$

$= E(M_2^2 + 2M_2T_2 + T_2^2) - E(M_2 + T_2)E(M_2 + T_2)$

$= E(M_2^2) + 2E(M_2T_2) + E(T_2^2) - E(M_2)^2 - E(T_2)E(M_2) - E(M_2)E(T_2) - E(T_2)^2$

$= E(M_2^2) - E(M_2)^2 + E(T_2^2) - E(T_2)^2 + 2\left(E(M_2T_2) - E(M_2)E(T_2)\right)$

$= V(M_2) + V(T_2) + 2\,\mathrm{cov}(M_2, T_2)$

c) $\mathrm{cov}(M_2, T_2) = \frac{1}{2}\left(V(X_1 + X_2) - V(M_2) - V(T_2)\right).$

Copie anonyme - n°anonymat : 408084

Code épreuve : 284	**Nombre de pages :**	**Session :** 2022

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

PROBLÈME :

PARTIE 1 : Valeurs propres d'une matrice croix particulière.

$n=3$.

1) $Rg(M_3) = 2$.

2) $\ker(M_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

3) $Rg(M_3) \neq 3$ donc 0 est une valeur propre de M_3.

$E_0(M_3) = \ker(M_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

4) λ est valeur propre $\Leftrightarrow$ $M_3X = \lambda X$ avec $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ le sous espace propre associé.

$M_3 X_{-1} = \begin{pmatrix}y\\x+y+z\\y\end{pmatrix}$ et $-1X_{-1} = -\begin{pmatrix}-y\\-x-y-z\\-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\x+y+z\\y\end{pmatrix} = M_3 X_{-1}$

$E_{-1}(M_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

De même, 2 est valeur propre et $E_2(M_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

5) $\dim(E_0) + \dim(E_{-1}) + \dim(E_2) = 3$ = taille de M_3.
Ainsi, M_3 est diagonalisable.

Avec :

$D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$ on obtient $M_3 = PDP^{-1}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6) $Rg(M_n) = 2$.

7) Selon le théorème du rang, $\dim(\ker M_n) + \dim(Im\, M_n) = n$
Donc $\dim(\ker M_n) = n-2$ car $\dim(Im\, M_n) = rg(M_n) = 2$
Donc 0 est valeur propre de M_n.

8) Mq : $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $Im(M_n)$.

- La famille est composé de 2 éléments et on sait que $\dim(Im\, M_n) = 2$
- La famille est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Ainsi, (e_1', e_2) forme une base de $Im(M_n)$.

9)

10) $M_n \begin{pmatrix}1\\1+\alpha\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\1+\alpha\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 1\\ \alpha + n = \lambda(1+\alpha)\\ \lambda = 1\\ \vdots\end{cases}$

11) $\lambda^2 - \lambda - t + 1$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-t+1) = 1 + 4t - 4$
$= 4t - 3$

Si $t = \frac{3}{4}$, alors il y a une solution
Si $t > \frac{3}{4}$, alors il y a 2 solutions
Si $t < \frac{3}{4}$, alors il n'y a pas de solution réelle.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$
$\Delta > 0 \Leftrightarrow t > \frac{3}{4}$
$\Delta < 0 \Leftrightarrow t < \frac{3}{4}$.

12) On sait que $n \geqslant 3$. Donc l'équation admet 2 solutions réelles.

13) Mq toutes vp de $M_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 1 + r(r-1)$

Partie II - Un espace probabilisé de matrices et une fonction de seuil.

A). $n=3$.

16) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple sont deux matrices de Ω n'ayant pas la même probabilité lorsque $p \neq q$.

17) La matrice qui possède la croix d'indice 2 peut avoir ou bien des 1 ou bien des 0 pour les autres coefficients. Donc, si on écrit la probabilité de la matrice comme le produit de la probabilité de chaque coefficient, on obtient :

$1 \times p \times 1 \times p \times p \times p \times 1 \times p \times 1 = p^5$.

18) Comme on se situe sur Ω avec $n=3$, la seule croix que peut posséder la matrice est celle d'indice 2. On a donc soit un échec, soit une victoire, avec une probabilité de victoire égale à p^5. Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p^5)$.

$E(Y) = p^5 \qquad V(Y) = p^5(1-p^5)$.

B). 19) La variable aléatoire X représente le nombre de croix présentes dans la matrice.

20) $\mathbb{P}(X_k = 1) = (p_n)^5$ car les autres coefficients ne changent pas le fait d'obtenir une croix.

On a : $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(m_{k-1,k} = 1) \times \mathbb{P}(m_{k,k} = 1) \times \mathbb{P}(m_{k+1,k} = 1)$

$\times \mathbb{P}(m_{k,k-1} = 1) \times \mathbb{P}(m_{k,k+1} = 1)$.

$= (p_n)^5$.

21) $E(X) = E\left(\sum_{k=2}^{n-1} X_k\right) = \sum_{k=2}^{n-1} E(X_k) = \sum_{k=2}^{n-1} 0 \times \mathbb{P}(X_k = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X_k = 1)$

$= \sum_{k=2}^{n-1} (p_n)^5 = \left((p_n)^5\right)^{n-2} = (p_n)^{5n-10}$.

22)

23)

24). $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

25) $E(X_k X_{k+1}) = \sum_{k=2}^{n-1}\sum_{k=2}^{n-1}$