Copie anonyme - n°anonymat : 447776

E5-00389
447776
Maths B/L

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 24 | Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1) a) • La fonction f est continue sur $\mathbb{R}-$ en tant que produit de fonction qui le sont, de même sur $\mathbb{R}_+^*$
Ainsi, elle est continue sur $\mathbb{R}$ car:

• $\lim\limits_{x \to 0^<} \frac{1}{2} x e^{-x^2/2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^>} -\frac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$

Leur limites sont égales

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } \cancel{x>0}\ x \leq 0 \\ -\frac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } \cancel{x\leq 0}\ x > 0 \end{cases} = -f(x)$

Donc $\boxed{\text{la fonction est impaire.}}$

c) • f est déri • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{2x} e^{-x^2/2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2e^{x^2/2}} = \frac{1}{2}$

$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0}$

• Donc le ta l'accroissement fini admet une limite finie en 0.

2)a) f est dérivable en tant que produit de fonctions qui le sont sur $\mathbb{R}^+$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \frac{1}{2e^{x^2/2}} \cancel{+} - \frac{2x}{2e^{x^2/2}}$

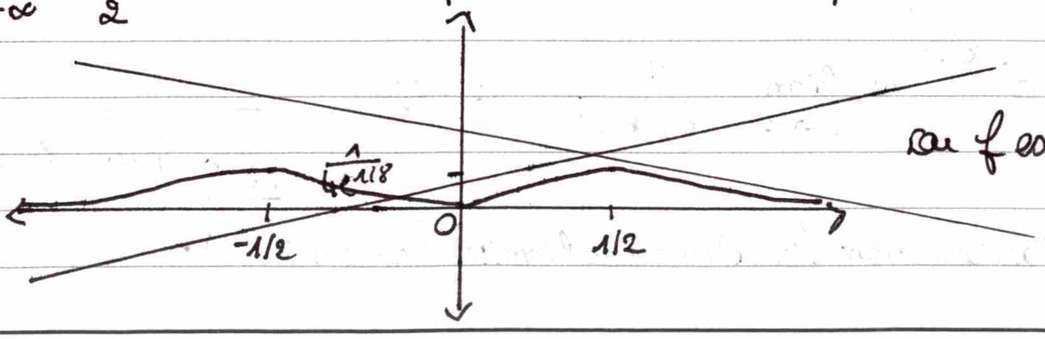
$= \frac{1-2x}{2e^{x^2/2}}$

- $2e^{x^2/2} \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$
- $1-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

x	0	$1/2$	$+\infty$
$2e^{x^2/2}$	$+$	|	$+$
$1-2x$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$0 \nearrow$	$\frac{1}{4e^{1/8}}$	$\searrow 0$

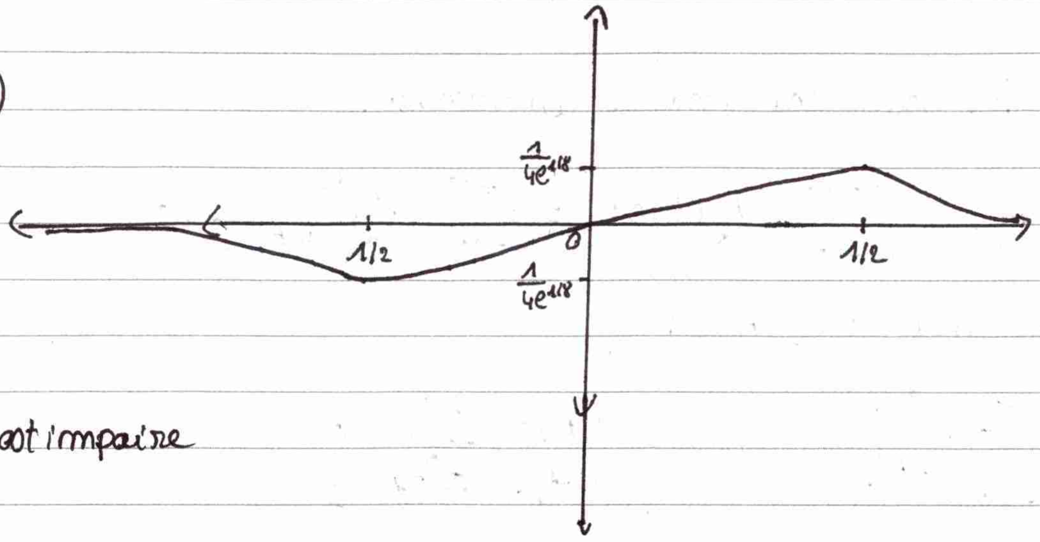
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
- $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4e^{1/8}}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|x|}{2} e^{-x^2/2} = 0$ par croissance comparée

B)



car f est im

b)



car f est impaire

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cancel{f'(x}$ la dérivée de $x \longmapsto e^{-x^2/2}$ est :

$$\boxed{-xe^{-x^2/2}}$$

d) • f est continue sur $\mathbb{R}$.

• $f(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^*$ (en comptant la valeur absolue)

• $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{2} e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{|x|}{2} e^{-x^2/2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{|x|}{2} e^{-x^2/2}\,dx$$

Or : soit $A > 0$, $$\int_0^A \frac{|x|}{2} e^{-x^2/2}\,dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2/2}\right]_0^A$$

$$= \frac{-1}{2e^{A^2/2}} + \frac{1}{2} \xrightarrow[A \to +\infty]{} \boxed{\frac{1}{2}}$$

De même : $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Donc $\boxed{f \text{ peut être considérée comme une densité de probabilité sur } \mathbb{R}.}$

3)a) $E(X)$ existe si converge absolument.

Soit $t \in \mathbb{R}$ tq : $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^2}{2e^{t^2/2}} dt$

Soient u et v C_1 sur $\mathbb{R}$ tq:

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{t}{2}e^{-t^2/2} \\ u(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2/2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v(t) = \cancel{\frac{t^2}{2}}\ t \\ v'(t) = \cancel{2t}\ 1 \end{cases}$$

Ainsi par IPP et en posant $A>0$,

$$\int_0^A \frac{|t|^2}{2e^{t^2/2}} dt = \left[\frac{-t}{2}e^{-t^2/2}\right]_0^A + \int_0^A \frac{1}{2}e^{-t^2/2} dt$$

$$= \frac{-A}{2e^{A^2/2}} + \frac{1}{2}\int_0^A e^{-t^2/2} dt$$

On soulignons que $\lim_{A \to +\infty} \frac{-A}{2e^{A^2/2}} = 0$ par croissance comparée.

Et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$

Donc : $\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt + \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc $\boxed{E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}}$

b) • Posons F_X la fonction de répartition de X : Soit $A<0$

Ainsi, $\forall x<0$, $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_A^x f(t)dt$

Copie anonyme - n°anonymat : 447776

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 24	Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$$F_X(x) = \left[\frac{1}{2}e^{-t^2/2}\right]_A^x = \frac{1}{2}e^{-x^2/2} - \frac{1}{2}e^{-t^2/2}$$

$$\xrightarrow[A \to -\infty]{} \frac{1}{2}e^{-x^2/2}$$

• $\forall x > 0$, soit $A > 0$,
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt = \int_x^A f(t)dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{-t^2/2}\right]_x^A = \frac{1}{2}e^{-A^2/2} - \frac{1}{2}e^{-x^2/2}$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2/2}$$

Ainsi :
$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 1/2e^{-x^2/2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

c) • soit $x \leq 0$, $\frac{1}{2}e^{-x^2/2} = \frac{3}{4} \iff e^{-x^2/2} = \frac{3}{2}$

$\iff -\frac{x^2}{2} = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \iff x^2 = -2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ~~or x~~ Pas de solution

• Soit $x>0$, $\quad 1-\frac{1}{2}e^{-x^2/2}=\frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}e^{-x^2/2}=-\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x^2/2}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x^2}{2}=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad x^2=-2\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ Pas de solution.

4) a) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\quad F_T(x)=P(T\leq x)=P(|X|\leq x)$

$$=P(-x\leq X\leq x)$$

$$=F_X(x)-F_X(-x)$$

Ainsi : $F_T(x) = \begin{cases} \cancel{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^{x^2/2}}-e^{-x^2/2}\right] \text{ si } x\leq 0} = 0 & \text{si } x\leq 0 \\ \end{cases}$

$$\boxed{F_T(x)=\begin{cases} F_X(x)-F_X(-x) \\ \end{cases}}$$

b) F_T est continue sur $\mathbb{R}$ donc dérivable. F_T T admet donc une densité notée f_T.

Ainsi $\boxed{f_T(x)=f(x)-f(-x)}$

c) T admet une espérance car X admet une espérance.

$$\boxed{E(T) = E(|X|) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(T^2 \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x})$

$= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}\left[-e^{-\frac{x}{2}} + e^{+\frac{x}{2}}\right] \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

(on suppose au vue de la forme du résultat que $T^2 \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$ bien que nous n'ayons pas réussi à le prouver).

Par conséquent : $\boxed{E(T^2) = 2}$
T^2 admet une espérance et :

e) X et T admettent des espérances :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \boxed{2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$ car $E(T) = E(X)$

$V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = \boxed{2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

Exercice 2

PARTIE 1

1) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + z = 0\}$

Ainsi : $x = -2y - z$

Donc ~~Vect(F)~~ $\Rightarrow$ $F = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Donc $\boxed{F \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension } 2.}$

2) a) Soit $u = (1, 0, -1)$ et $v = (-1, 1, -1)$

~~u.v =~~ $\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp v$ Donc u et v orthogonaux.

Or u et v appartiennent tous les deux à F et forment une famille libre de dimension 2.

Donc <u>(u, v) est une base orthogonale de F</u>.

b) Soit $(x, y, z) \in F^\perp$. Cherchons une base de $F^\perp$.

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = z \end{cases}$$

Une base de $F^\perp$ serait : $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Ainsi $\boxed{(w) \text{ est une base de } F^\perp}$

Copie anonyme - n°anonymat : 447776

Code épreuve : 284

Nombre de pages : 24

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

c) Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

- On sait que $F^\perp \oplus F = \mathbb{R}^3$, donc en concaténant leurs deux bases nous pourrions obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale.

Ainsi :

(u, v, w) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Normons-la en posant (α, β, γ) les trois normes respectives de (u, v, w) tel que : $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ainsi : $\boxed{\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}u, \frac{1}{\sqrt{3}}v, \frac{1}{2}w\right) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^3.}$

d) Les coordonnées de e_1 sont : $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)}$

Soit x un vecteur et e_i une base orthonormale

3)a) $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

Ainsi : p_F dans la base canonique :

• ~~dx~~,

• $\cancel{\langle(-2;1;0),(1,0,0)\rangle(1,0,0) + \langle(-2;1;0),(0,1,0)\rangle(0,1,0)}$

$\cancel{+ \langle(-2;1;0),(0,0,1)\rangle(0,0,1) = (-2,0,0)+(0,1,0)}$

Admettons le résultat de 3)a).

d) A est de rang 3 donc elle est bijective et donc elle est inversible.

e) • A est diagonalisable car il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale Δ tq : $A = P\Delta P^{-1}$ (on suppose que Δ est diagonale).

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, ~~tq~~ $A - \lambda I = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$\sim \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5-\lambda \\ 0 & 2+\lambda & (5-\lambda)(2-\lambda)-4 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

Ainsi $\lambda = -2$ et $\lambda = 4$

(Néanmoins soulignons que les valeurs propres sont les coefficients situés sur la diagonale de Δ).

b) Soit : $p_F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \left(\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5x - 2y - z \\ -2x + 2y - 2z \\ -x - 2y + 5z \end{pmatrix} \right)$$

$$\bullet\ p_F\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; 0 ; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{6\sqrt{2}} + \frac{2}{6\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{6\sqrt{2}} + -\frac{5}{6\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; 0 ; \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\bullet\ p_F\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{-1}{\sqrt{3}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{-5}{6\sqrt{3}} - \frac{2}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \\ \frac{2}{6\sqrt{3}} + \frac{2}{6\sqrt{3}} + \frac{2}{6\sqrt{3}} \\ \frac{1}{6\sqrt{3}} - \frac{2}{6\sqrt{3}} + -\frac{5}{6\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$p_F\left(\frac{1}{2} ; 1 ; \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} ; 1 ; \frac{1}{2} \right)$$

Ainsi : $\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 1/2 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

4) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, la distance entre une base orthogonale et un vecteur x est donnée par la formule :

$\|x - p_F(x)\|$ or une distance est toujours positive.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{\|p_F(x)\| - \|x\| \leq 0}$

$\Leftrightarrow \boxed{\|x - p_F(x)\| \geq 0}$ Toujours vrai

~~Si~~ Si il existe $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tq $\|p_F(x)\| = \|x\|$

alors $\cancel{\frac{\|p_F(x)\|}{\|x\|}}$ ~~$\neq 0$ existe~~. $\|p_F(x)\|$ divisible par $\|x\|$

Donc la fonction $f(x) = \frac{\|p_F(x)\|}{\|x\|}$ existe.

Cette fonction admet alors un maximum.

Ainsi $\boxed{\text{la valeur ci-dessous existe}}$

$$\max\left\{ \frac{\|p_F(x)\|}{\|x\|} ,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \right\}$$

PARTIE 2

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^n$.

* $\varphi(\lambda x + y) = \langle \lambda x + y,\ v \rangle v$
$= [\lambda \langle x, v\rangle + \langle y, v\rangle] v$

$= \lambda \langle x, v\rangle v + \langle y, v\rangle v$
$= \lambda \varphi(x) + \varphi(y)$

Donc φ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$.

* φ va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

Donc: $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n}$

soit $x \in \mathbb{R}^n$

b) $\boxed{\varphi \circ \varphi(x)} = \varphi(\langle x, v\rangle v) = \varphi\langle \langle x, v\rangle v, v\rangle v$

car $\|v\| = 1$

$= \cancel{\varphi} \langle \langle x, v\rangle \langle v, v\rangle \rangle v = \langle \langle x, v\rangle \|v\| \rangle v = \langle x, v\rangle v \boxed{= \varphi(x)}$

Donc φ projection

Copie anonyme - n°anonymat : 447776

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 24	Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

• ~~Im~~ Mq $Im(\varphi) = Vect(N)$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n$.

$Im(\varphi) = Vect\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$

$= Vect\{N\}$ car : $\varphi(e_1) = \langle (1, 0, \dots, 0), (N) \rangle N$

Ainsi notons a_1 le coefficient de la première coordonnée de (N) :

$\varphi(e_1) = a_1 N$, soit de manière générale : $\varphi(e_i) = a_i N$

Donc $Vect\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ est un ensemble de vecteurs

formant des combinaisons linéaires avec le vecteur (N).

Donc $\boxed{Im(\varphi) = Vect(N)}$

1c) ~~Mq $\varphi(x) = \sum_{i=1}$~~

Soit $P_{Im\varphi}(x) = \langle x, N \rangle N$ d'après la formule de la projection orthogonale citée auparavant

$= \varphi(x)$

Donc $\boxed{P_{Im\varphi}(x) = \varphi(x)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d) • Soit $rg(\varphi) = 1$ Donc d'après le théorème du rang

$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n-1$

Donc 0 est valeur propre car φ non inversible.

• ~~Soit~~

e) ~~On a montré que dans 4) PARTIE 1, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|p$~~

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|\varphi(x)\| = \| \langle x, v \rangle v \|$

$= \|v\| \, \|\langle x, v\rangle\|$

$= \|\langle x, v\rangle\|$ car $\|v\| = 1$

On $\|\langle x, v\rangle\| \leq \|x\|$ d'après Cauchy Schwarz

Donc $\boxed{\|\varphi(x)\| \leq \|x\|}$

f) Ainsi : $\|\varphi(x)\|$ divisible par $\|x\|$ si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Donc la fonction $h(x) = \dfrac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}$ existe et admet un maximum.

• $\dfrac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} = \dfrac{\|\langle x, N\rangle\|}{\|x\|}$

Donc $\boxed{\max\left\{ \dfrac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} = \dfrac{\|\langle x, N\rangle\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}\right\}.}$

2). a) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $s\circ s(x) = s(2\varphi(x) - x)$

$$= 2\varphi[2\varphi(x) - x] - (2\varphi(x) + x)$$

$$= 4\varphi\circ\varphi(x) - 2\varphi(x) - 2\varphi(x) + x$$

$$= 4\,\cancel{\varphi(x)} - 4(\varphi(x) + x \quad \text{car } \varphi\circ\varphi = \varphi$$

$$= x$$

Donc $\boxed{s\circ s = id}$ s est une symétrie de $\mathbb{R}^n$.

b) /

c) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|s(x)\| = \|2\varphi(x) - x\| = 2\|\varphi(x)\| - \|x\|$

$$= 2\|\langle x, \cancel{a}\rangle\| - \|x\|$$

Nous supposons alors que $\|\langle x, a\rangle\| = \|x\|$ (Auquel cas 1 serait la réponse à la question f))

Ainsi : $\boxed{\|s(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.}$

d)

PARTIE 3

3 1) a)

b) si $\|p_H(x)\| \leq \|x\|$ alors $\|p_H(x)\|$ divisible par $\|x\|$ avec x non nul.

D'où l'existence d'un maximum

2) a) Soit $x \in (\mathrm{Ker}(p))^{\perp}$ Ainsi : $p(x) = 0 \ \forall x \in H^{\perp}$

$$\langle x, p(x) - x \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i [(p(x_i) - x_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i p(x_i) - \sum_{i=1}^{m} (x_i)^2$$

$$= - \sum_{i=1}^{m} (x_i)^2$$

$$= - \|x\|$$

Ainsi : $\boxed{\langle x, p(x) - x \rangle = - \|x\|}$

Code épreuve : 284

Nombre de pages : 24

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3

PARTIE 1.

1) $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$ est convergente (c'est une série de Riemann)

~~2) a) • $W_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(0)\,dt = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = [t]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$~~

~~• $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(1)\,dt = \boxed{0}$~~

~~b) Soit $n\in\mathbb{N}$,~~

2) a) $W_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(t)\,dt = [t]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \left[t\cos^2(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2t\cos t\sin t\,dt = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

En posant u et v C_1 sur $\mathbb{R}$ tq : $\begin{cases} \cancel{u'(t) = \cos t} \\ u(t) = \sin t \end{cases}$ $\begin{cases} \cancel{v(t) = \cos t} \\ v'(t) = -\sin t \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $W_0 > 0$ ~~et la suite est croissante~~. Donc $W_n > 0$.

~~d)~~

$\forall n \in \mathbb{N}$,

c) $W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)dt - \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2}(t)dt$

$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)[-\cos^2(t) + 1]\, dt$

$$\boxed{= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \sin t \sin t \, dt}$$

$\cos^2 + \sin^2 t = 1$

car $\Leftrightarrow$ ~~savons~~ $\cos^2(t) + 1 = 2 \sin^2 t$

d) $\forall n \in \mathbb{N}$, mq par récurrence: $(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$.

- Soit pour $n = 0$: $* \; 2W_1 = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
  $* \; W_0 = \frac{\pi}{2}$

Donc vrai au rang 0.

- Soit n un entier naturel fixé.
  Supp la propriété soit vraie.
  Montrons que $(2n+3)W_{n+2} = (2n+2)W_{n+1}$.

3) a) $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$J_m - J_{m+1} = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)dt - \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n+2}(t)dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2m}(t)[1 - \cos^2(t)]\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2m}(t) \sin(t) \sin(t)\, dt$$

On: $\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)dt + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{2n+1}(t)\, dt$

$$= \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} 2t^2 \cos^{4n+1}(t)dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2t^2 \cos}{2n+1}^{4n+1}(t)\, dt$$

$= \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t) \sin t \sin t\, dt$ avec: $W_m(2n+1) - (2n+2)W_{n+1} = 0$

Et 2) c).

D'où l'égalité

b) d'après 3a) $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$-J_m + \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) J_{m+1} = \frac{-2}{2n+1}\int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2n+1}(t)\, dt$$

$$= \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}$$

Avec: $W_{n+1}(2n+2) - (2n+1) W_m = 0$

$$\Leftrightarrow \quad W_{n+1}\frac{(2n+2)}{(2n+1)} - W_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad W_{n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) - \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,dt \times \frac{2n+1}{2n+2}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n+2}(t)\,dt}{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2}(t)\,dt} - \frac{\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt}{\int_0^{\pi} \cos^{2n}(t)\,dt}$$

d) D'après c) ; $$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} = \frac{-2}{(2n+2)^2} + \frac{J_n}{W_n}$$

Ainsi $\left(\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmétique de raison : $\boxed{\frac{-2}{(2n+2)^2}}$

Ainsi : $$\frac{J_n}{W_n} = -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \frac{J_0}{W_0}$$

Car : $$\frac{-2n}{(2n+2)^2} = \frac{-1}{2n} - \frac{1}{4} - \frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right]$$

Copie anonyme - n°anonymat : 447776

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284

Nombre de pages : 24

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

4)a) $\forall t \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, ~~[illegible]~~ $\sin t \leq 1$

~~[illegible]~~ $\sin t \leq t$

CAR ~~Ainsi~~ ~~[illegible]~~, $\sin(0) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

On, $\frac{2t}{\pi} \leq t$

b)

5) Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$

$$\Leftrightarrow \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = -2\left[\frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0}\right]$$

$n \longrightarrow +\infty$ Alors $\boxed{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = 2\frac{J_0}{W_0}}$ car $\lim_{n \to +\infty} \frac{J_n}{W_n} = 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6) $\forall m \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^{p-1} \leq 1$

$$-\frac{1}{p^2} \leq \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \leq \frac{1}{p^2}$$

$$-\sum_{p=1}^{m} \frac{1}{p^2} \leq \sum_{p=1}^{m} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \leq \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{p^2}$$

Par le théorème des gendarmes : $\boxed{\delta_{\cancel{2}} = \mathcal{G}_{d_2} = \frac{2J_0}{W_0}}$

PARTIE 2.

1) $\forall x \in [0;1], \forall m \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{p=1}^{m} (-1)^{p-1} x^{p-1} = \sum_{p=1}^{m} (-x)^{p-1} = \sum_{p=0}^{m+1} (x)^p (-1)^p$$

$$= \frac{1-(-1)^m x^m}{1+x} \quad \boxed{= \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^m}{1+x}}$$

2) $\forall x \in [0;1], \forall m \in \mathbb{N}^*$

3) a) ~~Soit u et v C^1 sur $[0;1]$:~~ L'intégrale est impropre en 0.

$$\cancel{\begin{cases} u'(x) = \\ u(x) = \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) \\ v'(x) \end{cases}}$$

• $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ Donc l'intégrale converge, par prolongement par continuité en 0.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

c) $$\left| \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} + u_n$$

Donc $$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \zeta_2 = \frac{2J_0}{W_0}}$$

6

Exercice 4

PARTIE 1 :

1) $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$

par indépendance

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i \cap Y=k-i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i) P(Y=k-i)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-i}}{(k+i)!} = \cancel{e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(\lambda+\mu)^i}{(i)!}}$$

Ainsi. $\approx$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=1}^{+\infty}$$

2) • $Cov(Z, aX+bY) = Cov(aZ, X) + Cov(Z, bY)$

$$= a\,Cov(Z, X) + b\,Cov(Z, Y)$$

• $V(aX+bY) = V(aX) + V(bY) + 2ab\,Cov(X, Y)$

$$= a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab\,Cov(X, Y).$$

PARTIE 2.

1) $P(Y=k) = \sum_{l=1}^{k} P(X_i = k)$

$$= \sum_{k=1}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = \boxed{\cancel{1}} \boxed{\frac{e}{e}}$$

Ainsi $V(Y_k) =$