Copie anonyme - n°anonymat : 870126

Z2-00102
870126
Maths B/L

Code épreuve : 284 | **Nombre de pages :** | **Session :** 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1

1) a) Montrons que f est continue en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^-} -\frac{1}{2}x e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2}x e^{-\frac{x^2}{2}} = f(0) = 0$ d'où le résultat.

f est aussi continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions continues sur ces deux intervalles.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{|-x|}{2} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{|x|}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$ donc f est paire

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Or $\begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} \underset{x \to 0}{\to} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} \underset{x \to 0}{\to} \frac{1}{2} \end{cases}$ donc les limites à droite et à gauche en 0 ne sont pas égales. f n'est pas dérivable en 0.

2) a) $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} + x \times (-x) e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$

$= \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$

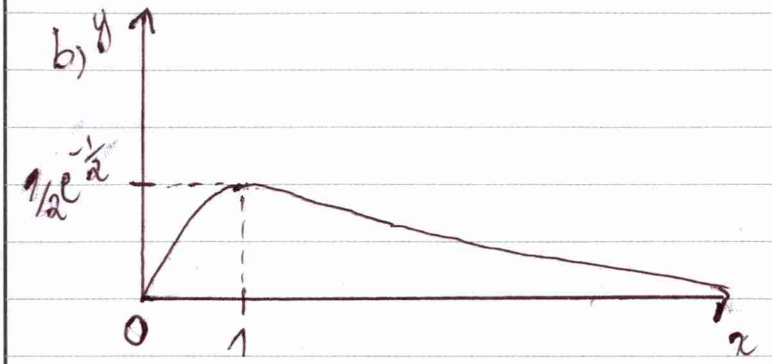
Ainsi $f'(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées.

• $f(1) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

b)



c) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, • $f(x) \geqslant 0$

• f est continue sur $\mathbb{R}$

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

En effet, $-\frac{1}{2}\int_M^0 te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^N te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_M^0 - \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^N$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{M^2}{2}}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{N^2}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\underbrace{\left(e^{-\frac{M^2}{2}} + e^{-\frac{N^2}{2}}\right)}_{\substack{\to 0 \\ M \to -\infty \\ N \to +\infty}} \underset{\substack{M \to -\infty \\ N \to +\infty}}{\to} 1$$

donc f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$

3) a) $\mathbb{E}(X)$ existe (admis par l'énoncé)

$$\mathbb{E}(X) = -\frac{1}{2}\int_M^0 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{1}{2}\int_0^N t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_M^0 t\times(-te^{-\frac{t^2}{2}})dt - \frac{1}{2}\int_0^N t\times(-te^{-\frac{t^2}{2}})dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{[te^{-\frac{t^2}{2}}]_M^0}_{\underset{M\to-\infty}{\to 0}} - \int_M^0 e^{-\frac{t^2}{2}}dt\Big) - \frac{1}{2}\Big(\underbrace{[te^{-\frac{t^2}{2}}]_0^N}_{\underset{N\to+\infty}{\to 0}} - \int_0^N e^{-\frac{t^2}{2}}dt\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(-\int_M^0 e^{-\frac{t^2}{2}}dt\Big) + \frac{1}{2}\int_0^N e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int_0^N e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \int_M^0 e^{-\frac{t^2}{2}}dt\Big) = \frac{1}{2}\Big(\int_0^N e^{-\frac{t^2}{2}} - \int_0^{-M} e^{-\frac{u^2}{2}}du\Big)$$

en posant $u=-t$ dans la 2ème intégrale (changement de variable)

$\underset{\substack{N\to+\infty\\ M\to-\infty}}{\to} 0$ donc $\mathbb{E}(X)=0$

On aurait pu trouver le résultat en utilisant la parité de f plus rapidement (méthode 2 ...)

b) $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

si $x\leq 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x -\frac{1}{2}te^{-\frac{t^2}{2}}dt$

Soit $M<0$. $\int_M^x -\frac{1}{2}te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Big[\frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}}\Big]_M^x$

$$= \frac{1}{2}\Big(e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{M^2}{2}}\Big)$$

$$\underset{M\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

si $x > 0$, $F_X(x) = \int_M^0 -\frac{1}{2}te^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_0^x \frac{1}{2}t\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$$= \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

d'où le résultat.

c) • si $x \leq 0$: $\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{x^2}{2}}_{0<} = \underbrace{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}_{>0}$ donc absurde

Donc pas de solution sur $\mathbb{R}_-$

• si $x > 0$, $1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $x^2 = 2\ln(2)$

$x = \sqrt{2\ln(2)} \in \mathbb{R}_+^*$

La solution trouvée représente le quartile d'ordre 3 de X (unicité de la solution)

4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = \mathbb{P}(T \leq x) = \mathbb{P}(|X| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq X \leq x)$

$$= F_X(x) - F_X(-x)$$

• si $x \leq 0$, $F_T(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = e^{-\frac{x^2}{2}} - 1$

• si $x > 0$; $F_T(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} = -\left(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1\right)$

Copie anonyme - n°anonymat : 870126

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 22	Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) On procède par dérivation. si $x \leq 0$, $f_T(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

si $x \geq 0$, $f_T(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

Ainsi on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_T(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$

c) f_T est une fonction paire donc $x f_T(x)$ est impaire sur $\mathbb{R}$

$E(T)$ existe sous réserve de convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} t|t|e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

On sait que $t^4 e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}\,dt$ converge (Riemann)

donc $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ converge

d) $T^2 = |X|^2 = X^2$

$$F_{T^2}(x) = F_{X^2}(x) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$$

- si $x > 0$, $F_{T^2}(x) =$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= 1 - e^{-x/2}$$

- si $x = 0$, $F_{T^2}(x) = 0$
- si $x < 0$, $F_{T^2}(x) = \mathbb{P}(T^2 \leq x) = 0$

donc $F_{T^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Donc $T^2 \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\mathbb{E}(T^2) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

e) $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2$

$$= 2 - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}$$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$= \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$= 2 - 0^2 = 2$

Exercice 3

1) Série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc convergente

2)a) $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$

$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \, dt$

$= \frac{\pi}{4}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^{2n}(t) \geq 0$

Par positivité de l'intégrale, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) \, dt \geq 0$

c) $W_n - W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\underbrace{(1-\cos^2(t))}_{\sin^2(t)}\,dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(t)\cos^{2n}(t)\,dt$$

d) $W_n - W_{n+1} = \left[\frac{\sin(t)}{-(2n+1)}\cos^{2n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \times \frac{1}{2n+1}\cos^{2n+1}(t)\,dt$

$$= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n+1}\cos^{2n+2}(t)\,dt$$

$$= +\frac{1}{2n+1} W_{n+1}$$

donc $W_n = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)W_{n+1} \iff W_n = \frac{2n+2}{2n+1}W_{n+1}$

ie $(2n+1)W_n = (2n+2)W_{n+1}$

3)a) $J_n - J_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\underbrace{(1-\cos^2(t))}_{\sin^2(t)}\,dt$

$$= \underbrace{\left[-\frac{1}{2n+1}\cos^{2n+1}(t)\,t^2\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t) \times (2t\sin(t)+t^2\cos(t))\,dt$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n+2}(t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1}J_{n+1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\,dt$$

d'où le résultat..

Copie anonyme - n°anonymat : 870126

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 22 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{\left(\frac{1}{2n+1}+1\right)}_{\frac{2n+2}{2n+1}} J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos^{2n+1}(t)\,dt$

$$= \frac{-2}{2n+1}\left(\underbrace{\left[\frac{-t}{2n+2}\cos^{2(n+1)}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n+2}\cos^{2n+2}(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}$$

c) $$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{\left(\frac{-2W_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} + J_n\right)\times\frac{2n+1}{2n+2}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)W_{n+1}}$$

$$= \frac{-2\cancel{W_{n+1}}}{(2n+2)^2\cancel{W_{n+1}}} + \cancel{\frac{(2n+1)J_n}{(2n+2)W_{n+1}}} - \cancel{\frac{(2n+1)J_n}{(2n+2)W_{n+1}}}$$

$$= \frac{-2}{(2n+2)^2}$$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{J_{k+1}}{W_{k+1}} - \frac{J_k}{W_k}}_{\text{télescopage}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-2}{(2k+2)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-2}{2^2(k+1)^2} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$

4) a) $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $f(t) = t - \sin(t)$
$g(t) = \sin(t) - \frac{2}{\pi} t$

- $f'(t) = 1 - \cos(t) \geq 0$
- $g'(t) = \cos(t) - \frac{2}{\pi}$

t	0		$\arccos(\frac{2}{\pi})$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$			$+$		
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$			$\frac{\pi}{2} - 1$
$g(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

donc $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, • $f(t) \geq 0$
• $g(t) \geq 0$

donc $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^2(t)}_{1-\cos^2(t)} \cos^{2n}(t)\,dt$

$= W_n - W_{n+1} \geq 0$ car (W_n) suite décroissante

on utilise l'inégalité de 4)(a)

$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin^2(t) \cos^{2n}(t)\,dt$

$\leq \frac{\pi^2}{4} (W_n - W_{n+1})$

Ainsi $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4} (W_n - W_{n+1})$

$$\frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4}\left(W_n - \frac{2n+1}{2n+2} W_n\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{2n+2} W_n = \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)} \quad \text{donc} \quad 0 < J_n \leqslant \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}$$

5) $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = -2\left(\frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0}\right)$ d'après 3)d)

Or $\displaystyle 0 < \frac{J_n}{W_n} \leqslant \frac{\pi^2}{8(n+1)}$ (division possible car $W_n > 0$ d'après 2)b))

donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = 2\left(\frac{J_0}{W_0} - \frac{J_n}{W_n}\right)$

$$\frac{2J_0}{W_0} > \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \geqslant 2\left(\frac{J_0}{W_0} - \frac{\pi^2}{8(n+1)}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2J_0}{W_0}$$

donc $\displaystyle \xi_2 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{2J_0}{W_0}$ par théorème d'encadrement

$$= \frac{2 \times \frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{6}$$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle |U_n| = \left|\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}\right| \underset{\text{inégalité triangulaire}}{\leqslant} \sum_{p=1}^{n} \frac{|(-1)^{p-1}|}{p^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$

$(U_n)_{n \geqslant 1}$ converge absolument donc converge

Partie 2

1) $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} (-x)^{p-1} = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1-(-x)^n}{1+x}$

Or $\displaystyle\frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x} = \frac{1-(-x)^n}{1+x}$ d'où le résultat...

2)

3) a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ est faussement impropre en 0

car $\displaystyle\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x-\frac{x^2}{2}}{x} = 1-\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\to} 1$

donc l'intégrale converge

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\left| \frac{\ln(1+x)}{x} - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{x^{p-1}}{p} \right| \leq \frac{x^n}{n+1}$ d'après 2)

$$\left| \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx - \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \underbrace{\int_0^1 x^{p-1}\,dx}_{\frac{1}{p}} \right| \leq \frac{\int_0^1 x^n\,dx}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

en intégrant l'inégalité entre 0 et 1

d'où le résultat.

Copie anonyme - n°anonymat : 870126

Code épreuve : 284

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

3) c) $\frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

Ainsi $S_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

Exercice 4

1) $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall k\in\mathbb{N}$, $P(X+Y=k) = \sum_{j=0}^{k} P((X=j)\cap(Y=k-j))$

indépendance de X et Y $= \sum_{j=0}^{k} P(X=j)P(Y=k-j)$

$= \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} \times \frac{e^{-\mu}\mu^{k-j}}{(k-j)!}$

$= \frac{1}{k!} e^{-(\lambda+\mu)} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\lambda^j \mu^{k-j}}_{(\lambda+\mu)^k}$

$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}{k!}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

2) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, • $\mathrm{cov}(Z, aX+bY) = \mathbb{E}(Z(aX+bY)) - \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(aX+bY)$

$= a\mathbb{E}(ZX) + b\mathbb{E}(ZY) - \mathbb{E}(Z)(a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y))$

$= a(\mathbb{E}(ZX) - \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(X)) + b(\mathbb{E}(ZY) - \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(Y))$

$= a\,\mathrm{cov}(Z,X) + b\,\mathrm{cov}(Z,Y)$

• $\mathbb{V}(aX+bY) = \mathbb{E}((aX+bY)^2) - \mathbb{E}(aX+bY)^2$

$= \mathbb{E}(a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2) - (a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y))^2$

$= a^2(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) + b^2(\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2) + 2ab(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))$

$= a^2\,\mathbb{V}(X) + b^2\,\mathbb{V}(Y) + 2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$

<u>Partie 2</u>

1) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $Y_k \hookrightarrow \mathcal{P}(k)$ par stabilité de la loi de Poisson $(\underbrace{1+1+\dots+1}_{k \text{ fois}} = k)$

$\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{V}(Y_k) = k$

2) $M_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(Y_1,Y_1) & \mathrm{cov}(Y_1,Y_2) \\ \mathrm{cov}(Y_2,Y_1) & \mathrm{cov}(Y_2,Y_2) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{cov}(Y_1,Y_2)$

$= \mathbb{E}(Y_1Y_2) - \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2)$

$= \mathbb{E}(X_1(X_1+X_2)) - \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2)$

$= \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2)$

indépen des X_k $= \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2 + \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2)$

$= 1+1^2+1^2-1\times 2 = 1 = \mathrm{cov}(Y_2, Y_1)$

2) b) Le déterminant de M_2 est égal à $2\times 1 - 1\times 1 = 1 \neq 0$
donc M_2 est inversible

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) a) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tq $i<j$.

$$\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}(Y_i Y_j) - \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j)$$

$$= \mathbb{E}\big((X_1+\dots+X_i)(X_1+\dots+X_j)\big) - ij$$

$$= \cancel{\mathbb{E}(X_1}$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{i} X_k \sum_{p=1}^{j} X_p\right) - ij$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{i}\sum_{p=1}^{j} \mathbb{E}(X_k X_p)\right) - ij$$

Comme $i<j$, X_k et X_p sont indépendants pour tout $k \in [\![1,i]\!]$
$p \in [\![1,j]\!]$

donc $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \sum_{k=1}^{i}\sum_{p=1}^{j} \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_p) - ij$

$$= \sum_{k=1}^{i}\sum_{p=1}^{j} 1 - ij$$

b) $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$

4) $Sp(T_n) = \{1\}$ car T_n est une matrice triangulaire supérieure avec que des 1 sur sa diagonale principale. Donc 0 n'est pas valeur propre de T_n. Ainsi T_n est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & 1 & & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & 1 & & 0 & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\forall i \in [\![2, n-1]\!],\ L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ & & & 0 & \cdots & & 0 & 1 & -1 \\ & & & 0 & \cdots & & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

R_n

Avec la méthode du pivot de Gauss, on trouve $R_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Copie anonyme - n°anonymat : 870126

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

5) $T_n + (T_n)^T = J_n + I_n$ où J représente la matrice avec que des 1

6)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Mq (U, V, W) est libre

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $\alpha U + \beta V + \gamma W = 0$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

1) $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ donc F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

famille libre et génératrice de F donc base de F

$\dim F = 2$

2)a) $\langle U, V\rangle = -1+0+1 = 0$ donc $U \perp V$

(U,V) est une famille orthogonale donc libre de deux éléments dans un espace de dimension fini $n=2$ donc c'est une base orthogonale de F.

b) $\langle W, (-2\ 1\ 0)\rangle = -2+2+0 = 0$

$\langle W, (-1\ 0\ 1)\rangle = -1+0+1 = 0$

W est orthogonal à une base de F donc c'est une base de $F^\perp$

c) On veut montrer que cette famille est libre

Soient $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha x_1 U + \beta x_2 V + \gamma x_3 W = 0$

$\begin{cases} (\alpha x_1, 0, -\alpha x_1) + (-\beta x_2, \beta x_2, -\beta x_2) + (\gamma x_3, 2\gamma x_3, \gamma x_3) = (0,0,0) \end{cases}$

donc $\begin{cases} \alpha x_1 - \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \\ \beta x_2 + 2\gamma x_3 = 0 \\ -\alpha x_1 - \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \end{cases}$

En écriture matricielle : $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & -\beta & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & 2\gamma & 0 \\ -\alpha & -\beta & \gamma & 0 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta x_2 = -2\gamma x_3 \\ \alpha x_1 = -3\gamma x_3 \end{cases}$

$(\alpha U, \beta V, \gamma W)$ est libre car (U,V,W) est libre (preuve page 18). C'est une famille de trois éléments dans $\mathbb{R}^3$ ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$) donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour que cette base soit orthonormée, il faut que $\begin{cases} \|\alpha U\|^2 = 1 \\ \|\beta V\|^2 = 1 \\ \|\gamma W\|^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\alpha^2 = 1 \\ 3\beta^2 = 1 \\ 6\gamma^2 = 1 \end{cases}$ donc on peut prendre $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

d)

3) a) $p_F(e_1) = \langle e_1, W \rangle W$

$p_F(e_2) = \langle e_2, W \rangle W$

$p_F(e_3) = \langle e_3, W \rangle W$

e) A est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable.
Soit $\lambda \in Sp(A)$.

$-2 + (5-6\lambda) \times (-2)$

$$\frac{1}{6}\left(\begin{array}{ccc|c} 5-6\lambda & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 2-6\lambda & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 5-6\lambda & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow 2L_1 + (5-6\lambda)L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4+(5-6\lambda)(2-6\lambda) & & 0 \\ -2 & 2-6\lambda & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 5-6\lambda & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_2}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2-6\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -4+(5-6\lambda)(2-6\lambda) & -2(6-6\lambda) & 0 \\ 0 & \underbrace{-4-2+6\lambda}_{6(\lambda-1)} & 12(1-\lambda) & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2-6\lambda & -2 & \\ \cancel{0} & \cancel{-4+(5-6\lambda)(2-6\lambda)} & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 36\lambda^2 - 48\lambda + 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6(\lambda-1) & 12(1-\lambda) & 0 \end{array}\right)$$

donc les valeurs propres sont les solutions de l'équation $36\lambda^2 - 48\lambda + 12 = 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 870126

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 22	Session : 2023

Épreuve de : MATHS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie 2

1) a) • $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = \langle x, v \rangle v \in \mathbb{R}^n$

• $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(\alpha x + y) = \langle \alpha x + y, v \rangle v$

$$= \alpha \langle x, v \rangle v + \langle y, v \rangle v$$

$$= \alpha \varphi(x) + \varphi(y)$$

donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

b)

c) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|\varphi(x)\|^2 = \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle$

$$= \langle \langle x, v\rangle v , \langle x, v \rangle v \rangle$$

$$= \langle x, v\rangle^2 \langle v, v\rangle$$

$$= \langle x, v\rangle^2 \|v\|^2$$

$$= \langle x, v\rangle^2 \quad \text{car } \|v\| = 1$$

$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$

2)a) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $s(-x) = 2\varphi(-x) + x$

$$= 2\langle -x, v\rangle v + x$$

$$= -2\langle x, v\rangle v + x$$

$$= -s(x)$$

~~donc s est une symétrie de $\mathbb{R}^n$~~

$$s \circ s(x) = s \circ (2\varphi(x) - x)$$

$$= s(2\langle x, v\rangle v - x)$$

$$= 2\langle x, v\rangle s(v) - s(x)$$

$$= 2\langle x, v\rangle (2\underbrace{\underbrace{\varphi(v)}_{\|v\|^2 v}}_{v} - v) - s(x)$$

$$= 2\langle x, v\rangle v - s(x)$$

$$= 2\varphi(x) - s(x)$$