Copie anonyme - n°anonymat : 734312

T3-00091
734312
Maths B/L

Code épreuve : 284 | **Nombre de pages :** 16 | **Session :** 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1

1)a) • f est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur ces intervalles.

En effet $x \mapsto x$ continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$

$x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto e^x$ aussi donc par composition de fonctions continues, $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est également continue sur cet intervalle.

• $f(0) = -\frac{1}{2} \times 0 \times e^0 = 0$

et $\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$ donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 = f(0)$

Donc f est continue en 0.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

1)b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{|-x|}{2} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{|x|}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$ donc f paire.

1)c) $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\frac{1}{2} \cancel{x} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\cancel{x}} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2} \cancel{x} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\cancel{x}} = \frac{1}{2}$

donc $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$ donc f n'est pas dérivable en 0.

2)a) Sur $[0, +\infty[$, $f(x) = +\frac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{2}}$ $x \geq 0$, dérivable en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $f'(x) = +\frac{1}{2}(e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2) = +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{x^2/2}} - x^2\right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2$ sur $[0;+\infty[$.

$g'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} - 2x < 0$ donc g strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

Or $g(0) = e^0 - 0 = 1$

. $e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} = x^2$

$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} = \ln(x^2) = 2\ln(x)$

$\Leftrightarrow -x^2 = 4\ln(x)$

. $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$

$f'(1) = \frac{1}{2}\cdot(e^{-1/2} - 1) < 0$

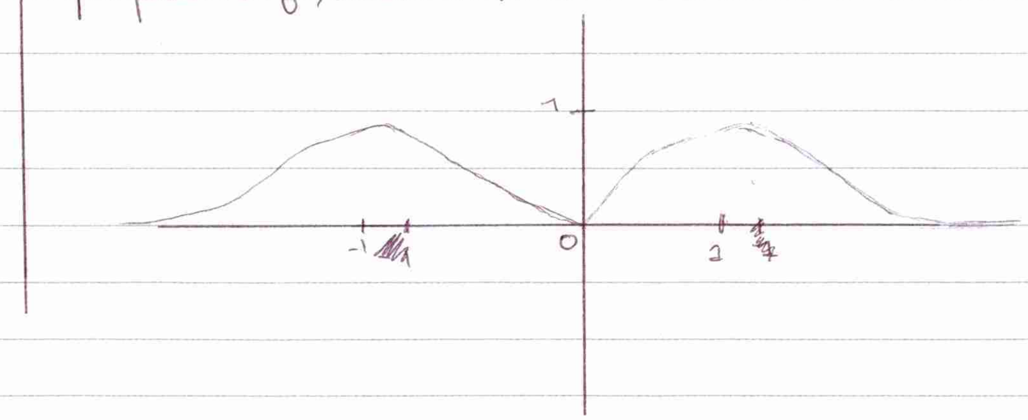
$f(0) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2)b par parité de f, on obtient :



2)c) Soit $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$

h dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{h'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}}$

2)d) • $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$

• D'après 1)a), f est continue sur $\mathbb{R}$.

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_{-\infty}^{0} -\frac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ par parité de f

et $\int_{B}^{0} x e^{-\frac{x^2}{2}} = +\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_B^0$ d'après 2)c)

$= +1 - e^{-\frac{B^2}{2}}$

or $\lim\limits_{B \to -\infty} e^{-\frac{B^2}{2}} = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_{-\infty}^{0} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$

• Donc f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

3)a) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} -x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(\left[x e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right) + \frac{1}{2}\left(\left[-x e^{-x^2/2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)$

en effectuant deux intégrations par parties avec :

$u = x \quad u' = 1$ $\qquad\qquad$ $w = x \quad w' = 1$

$v' = -x e^{-x^2/2} \quad v = e^{-x^2/2}$ $\qquad\qquad$ $z' = x e^{-x^2/2} \quad z = -e^{-x^2/2}$

$u, v \in \mathcal{C}^1$ $\qquad\qquad$ $w, z \in \mathcal{C}^1$

or $\left[x e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{0} = \left[-x e^{-x^2/2}\right]_0^{+\infty} = 0$

et $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\pi/2}$

en reconnaissant la densité d'une variable aléatoire X' suivant loi normale de paramètres $(0,1)$ telle que $X' \sim \mathcal{N}(0,1)$

on a en effet $f_{X'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$

Et donc par parité de $e^{-t^2/2}$ on a $\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Donc $\mathbb{E}(X) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0$

3)b) $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

• Si $x \leq 0$, $F_X(x) = -\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} \cancel{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \varphi'(t)dt$ d'après 2)c)

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{car } \lim_{t\to-\infty} e^{-t^2/2} = 0$$

• Si $x > 0$, ~~$F_X(x) = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2} t e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}\left[-e^{-t^2/2}\right]_0^{+\infty}$~~

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} t e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}\left[-e^{-t^2/2}\right]_0^{x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-x^2/2}+1\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2/2}$$

Donc $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x^2/2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2/2} & \text{si } x > 0. \end{cases}}$

3)c) $F_X(x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2/2} = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-x^2/2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2/2} = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} = -\ln(2)$ en composant par ln

$$\Leftrightarrow x^2 = 2\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \begin{cases} \sqrt{2\ln(2)} \\ -\sqrt{2\ln(2)} \end{cases}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 734312

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 12 | Session : 2023

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

4)a) $\forall x \in \mathbb{R}, F_T(x) = \mathbb{P}(|X| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x^2/2} - 1 + \frac{1}{2}e^{-x^2/2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2/2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{F_T(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

4)b) $\boxed{f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x e^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$ en dérivant l'égalité obtenue en 4)a).

4)c) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$ d'après l'intégration par parties effectuée en 3)a)

$= \underline{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$ d'après les calculs effectués en 3)a), en reconnaissant une variable aléatoire $X' \sim \mathcal{N}(0,1)$ telle que $f_{X'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$

On a en effet la convergence de $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}$ du fait de la densité de X' car une densité est égale à 1.

Donc T admet une espérance et $\boxed{E(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

4)d) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}(T^2 \leq x) = \mathbb{P}(|X|^2 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$

$\Omega(T^2) = \mathbb{R}^+$

$$= \begin{cases} \cancel{\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \text{ si } x \leq 0} \quad \cancel{0 \text{ si } x \leq 0} \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x/2} - \frac{1}{2}e^{-x/2} \quad \cancel{\text{si } x > 0} \end{cases}$$

Donc $\boxed{F_{T^2}(x) = \begin{cases} \cancel{-1 \text{ si } x \leq 0} \; 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $T^2 \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $\mathbb{E}(T^2)$ existe et $\mathbb{E}(T^2) = 2$

4)c) T admet un moment d'ordre 2 donc $\mathbb{V}(T)$ existe et
$\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}$ d'après 4)c) et 4)d)
donc $\boxed{\mathbb{V}(T) = \frac{4-\pi}{2}}$

On $\mathbb{E}(T^2) = \mathbb{E}(|X|^2) = \mathbb{E}(X^2)$ donc X admet un moment d'ordre 2 donc
~~Donc~~ $\mathbb{V}(X)$ existe et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
$= 2 - 0$ d'après 3)a)
$\boxed{\mathbb{V}(X) = 2}$ ~~d'ap~~

Exercice 3

Partie 1

1) D'après le critère de Riemann, comme $2 > 1$, $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$ converge.

2 a) • $W_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

• $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \left[\frac{\sin^3(t)}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin^3(\pi/2) - \sin^3(0)}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

2)b) ~~$\forall n \in \mathbb{N}$, $2n$ est pair donc $\cos^{2n}(t) \geq 0$ $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$~~

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cos(\frac{\pi}{2}) \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \cos^{2n}(\frac{\pi}{2}) \leq 1$

Donc par positivité de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$.

2)c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\left(1 - \cos^2(t)\right) dt$

$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) \sin^2(t)\, dt$ car $\cos^2 + \sin^2 = 1$

$$\boxed{W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) \sin(t) \sin(t)\, dt}$$

2)d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n - W_{n+1} = \left[- \frac{\sin(t)\cos(t)^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2(n+1)}}{2n+1}\, dt$

en effectuant une intégration par parties (selon le résultat de 2)c)) avec :

$u = \sin(t)$ et $u' = \cos(t)$

$v' = \sin(t)\cos^{2n}(t)$ $\quad v = - \frac{\cos(t)^{2n+1}}{2n+1}$ $\Big\}$ $(u, v) \in C^1$

On obtient donc $W_n - W_{n+1} = \frac{W_{n+1}}{2n+1} \Rightarrow -(2n+1)W_{n+1} - W_{n+1} = -W_n(2n+1)$

$\Rightarrow (2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$

3)a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n - J_{n+1} = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\left(1 - \cos^2(t)\right) dt$

$$J_n - J_{n+1} = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t) \sin^2(t)\, dt$$

$$= \underbrace{\left[-t^2 \sin t \frac{\cos(t)^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^{\pi/2}}_{0} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)^{2n+1}}{2n+1} \times 2t \sin t\, dt + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n+2}}{2n+1} t^2\, dt}_{\frac{J_{n+1}}{2n+1}}$$

en effectuant une intégration par parties avec :

$v = (\sin t)t^2 \qquad v' = 2t \sin t + (\cos t)(t^2) \quad \Big\}\ u, v \in \mathcal{C}^1$

$u' = \cos(t)^{2n} \sin(t) \qquad u = \frac{-\cos(t)^{2n+1}}{2n+1}$

Donc $\boxed{J_n - J_{n+1} = \frac{1}{2n+1} J_{n+1} + \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos(t)^{2n+1}\, dt}$

3)b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) - J_n = \frac{-2}{2n+1} \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos(t)^{2n+1}\, dt$ d'après 3)a)

or $W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2}(t)\, dt$ et on veut donc montrer que

$$\frac{W_{n+1}}{2n+2} = \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos(t)^{2n+1}\, dt.$$

or $\int_0^{\pi/2} t \sin t \cos(t)^{2n+1}\, dt = \left[-t \frac{\cos(t)^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n+2}(t)}{2n+2}\, dt$

$$\int_0^{\pi/2} t \sin t (\cos t)^{2n+1}\, dt = \frac{W_{n+1}}{2n+2}$$

avec une intégration par parties avec $v = t \qquad v' = 1$

$(u, v \in \mathcal{C}^1) \qquad u' = \cos(t)^{2n+1} \sin t \qquad u = \frac{-\cos^{2n+2}}{2n+2}$

On obtient donc bien $\boxed{\frac{2n+2}{2n+1} J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}}$

3)c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cancel{\frac{2n+2}{2n+1} J_{n+1} - J_n \ \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} \times \frac{2n+1}{2n+2} W_n}$.

$$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{\frac{2n+2}{2n+1} W_{n+1}} \quad \text{d'après 2)d)}$$

Donc $\cancel{\frac{2n+2}{2n+1} J_{n+1} - J_n}$

$$= \frac{\frac{2n+2}{2n+1} J_{n+1} - J_n}{\frac{2n+2}{2n+1}(W_{n+1})}$$

$$= \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} \cancel{W_{n+1}} \times \frac{1}{\frac{2n+2}{2n+1} \cancel{W_{n+1}}} \quad \text{d'après 3)b)}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 734312

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 18 | Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi on obtient bien $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{-2}{(2n+2)^2}}$

3)d) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{-2}{(2n+2)^2} \Rightarrow \sum_{p=0}^{n-1} \cancel{\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}}} \frac{J_{p+1}}{W_{p+1}} - \frac{J_p}{W_p} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{-2}{(2p+2)^2}$

$\Rightarrow \frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = -\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(p+1)^2}$ par télescopage

$\Rightarrow \boxed{\frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}}$

4)a) $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\cancel{0\leq t\leq\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0\leq \sin(t)\leq 1}$

- soit $f(t) = t-\sin(t)$.

$f'(t) = 1-\cos(t) \geq 0$ car $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \cos t\in[0,1]$.

Donc $f(t)$ croissante et $f(0)=0$ donc $f(t)\geq 0$.

D'où l'inégalité de droite : $\boxed{\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \sin(t)\leq t}$

- $\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, soit $g(t) = \sin t - \frac{2}{\pi}t$

$g'(t) = \cos t - \frac{2}{\pi}$

donc $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{2}{\pi}$

en 0 on a bien $\frac{2}{\pi}\times 0 = 0 \leq \sin(0) = 0$

en $\frac{\pi}{2}$ on a bien $\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{2} = 1 \leq \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4)b) $\forall n \in \mathbb{N}$, On veut montrer que $0 < \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{2n}(t)\,dt$ (d'après 2)c))

Or $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{4}{\pi^2} t^2 \leq \sin^2 t$$

$$\Rightarrow 0 \leq t^2 \cos^{2n}(t) \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t \cos^{2n}(t)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2(t) \cos^{2n}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1})}.$$

De plus $J_n > 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n \neq 0$.

Or $\frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4}\left(W_n - \frac{2n+1}{2n+2} W_n\right)$ d'après 2)d)

$$= \frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{2n+2} W_n$$

$$= \frac{\pi^2}{8(n+1)} W_n$$

Donc $\boxed{0 < J_n \leq \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}}$

5) Donc d'après 4)b), $0 < \frac{J_n}{W_n} \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)} \Rightarrow -\frac{J_0}{W_0} < -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)} - \frac{J_0}{W_0}$ d'après 3)d)

Donc $2\left(\frac{J_0}{W_0} - \frac{\pi^2}{8(n+1)}\right) \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} < 2\frac{J_0}{W_0}$

On a selon 2)c), $W_0 = \frac{\pi}{2}$

et on a $J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$ donc $\frac{2J_0}{W_0} = \frac{\frac{\pi^3}{12}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{6}$

et $\ell\left(\frac{S_0}{W_0}-\frac{\pi^2}{8(n+1)}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{8(n+1)}\xrightarrow{n\to+\infty}\frac{\pi^2}{6}$

Donc par encadrement, $\boxed{\zeta_2=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}=\frac{\pi^2}{6}=\ell\frac{S_0}{W_0}}$

Partie 2

1) $\forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}x^{p-1}=\sum_{p=1}^{n}(-x)^{p-1}$ ~~# 1-(-x)^{p-1}~~

$\cancel{=\frac{1}{x}\sum_{p=1}^{n}(-x}$

$=\frac{1-(-x)^n}{1+x}$ car $-x\neq 1$ donc $1+x\neq 0$

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}x^{p-1}=\frac{1}{1+x}-\frac{(-1)^n(x)^n}{1+x}}$$

2) $\forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x t^n\,dt$

Et

~~Donc~~ $\left|\ln(1+x)-\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}\right|=\cancel{\left|\ln(1+x)-\left(\frac{1}{1+x}-\frac{(-1)^nx^n}{1+x}\right)\frac{x}{p}\right|}$

$\cancel{\leq\left|\ln(1+x)-\frac{x}{(1+x)}\right|+\left|\frac{x^{n+1}}{(1+x)p}\right|}$

3)a) l'intégrale est généralisée en 0.

On $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

L'intégrale est donc faussement généralisée en 0 donc elle est convergente.

3) c) On obtient donc $\left|\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx\right| \le \frac{1}{(n+1)^2} + \left|\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$.
par inégalité triangulaire

Donc $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx \le \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$

$$-\frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \le \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx \le \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$$

Donc en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, par encadrement, on obtient :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 734312

Exercice 2

Partie 1

1) • $(0,0,0) \in F$ car $0+2\times 0+0=0$ donc $F \neq \emptyset$.

• Soient $j=(x,y,z) \in F$ et $j'=(u,v,w) \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $x+2y+z=0$ et $u+2y+z=0$

~~$\lambda(x,y,z)+(u,v,w$~~

~~$\lambda j+j'=$~~ On a bien $\lambda(x+2y+z)+(u+2y+z)=0$

Donc F est stable par combinaison linéaire.

Donc F est un R espace vectoriel.

$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+2y+z=0\}$
$=\{x=-2y-z,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$
$=\mathrm{Vect}((-2,1,0)(-1,0,1))$ donc $\dim F \leq 2$.

On , ment, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha(-2,1,0)+\beta(-1,0,1)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2\alpha-\beta=0\\ \alpha=0\\ \beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \{\alpha=\beta=0$

Donc $((-2,1,0)(-1,0,1))$ est libre donc $\dim F \geq 2$

Donc $\boxed{\dim F=2}$

2(a) • $1+2\times 0+(-1)=0$ donc $u\in F$.

• $-1+2\times 1+1(-1)=0$ donc $v\in F$.

• $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha u+\beta v=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \beta=0\\ -\alpha-\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \{\alpha=\beta=0$

Donc (u,v) libre. Donc (u,v) base de F.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

. On $\langle u, v\rangle = \langle (1,0,-1), (-1,1,-1)\rangle$
$= -1 + 0\times 1 + (-1)(-1)$

$\boxed{\langle u, v\rangle = 0}$

Donc (u,v) base orthogonale de F.

2)b) $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3$ donc d'après le théorème du rang, ~~$\dim F^{\perp} = 3 - 1 = 2$~~
$\dim F^{\perp} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim F = 3 - 1 = 2.$

On $\langle (u,v), w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
$= 1 - 1 + (-1) + 2 - 1$
$= 0$

Donc $w \perp (u,v)$ qui est une base de F.

Donc w base de $F^{\perp}$.

2)c) $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3$ donc (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ d'après 2)a) et 2)b).

Soient $\alpha = \frac{1}{\|u\|} = \frac{1}{\langle u,u\rangle} = \frac{1}{1^2+0^2+(-1)^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\beta = \frac{1}{\|v\|} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\gamma = \frac{1}{\|w\|} = \frac{1}{1+4+1} = \boxed{\frac{1}{6}}$

On a alors $(\alpha u, \beta v, \gamma w) = \left(\frac{u}{2}, \frac{v}{3}, \frac{v}{6}\right)$ base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

2)d) $e_1 = (1,0,0)$

3(a)

Partie 2 : $\forall x \in \mathbb{R}^n$

1/a) • $\forall \varphi(x) = \langle x, v\rangle v \in \mathbb{R}^n$ donc $\mathrm{Im}(\varphi) \in \mathbb{R}^n$.

• Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\lambda x_1 + x_2) = \langle \lambda x_1 + x_2, v\rangle v$

$= \langle \lambda x_1, v\rangle v + \langle x_2, v\rangle v$

$= \lambda \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$

Donc φ est stable par combinaison linéaire

• $0 \in \mathbb{R}^n$ tq $\varphi(0) = 0$ ~~donc~~

Donc φ endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

1/b) • $\forall \varphi \circ \varphi(x) = \varphi(\langle x, v\rangle v) = \langle \langle x, v\rangle v, v\rangle v$

$= \langle x, v\rangle v$

$\varphi \circ \varphi(x) = \varphi(x)$ donc φ projection sur $\mathrm{Im}\,\varphi$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

c) Soit $y \in \mathrm{Im}\,\varphi$ tel que $\exists z \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(z) = \langle z, v\rangle v = y$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. On veut montrer que $\langle x, y\rangle = 0$.

$\langle x, y\rangle = \langle x, \langle z, v\rangle v\rangle$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

2/a) $\forall s \circ s(x) = s(2\varphi(x) - x) = 2\varphi(2\varphi(x) - x) - 2\varphi(x) + x$

$= 4\varphi \circ \varphi(x) - 2\varphi(x) - 2\varphi(x) + x$ par linéarité de φ

$= 4\varphi(x) - 4\varphi(x) + x$ car φ projecteur

$s \circ s(x) = x$ donc s symétrie de $\mathbb{R}^n$.

2/b) s symétrie de $\mathbb{R}^n$ donc $Sp(s) \subset \{0, 1\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $s(x) = 0 \Leftrightarrow 2\varphi(x) = x$

$\Leftrightarrow 2\langle x, v\rangle v = x$

Copie anonyme - n°anonymat : 734312

Code épreuve : 234	Nombre de pages : 16	Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $s(x) = x \Leftrightarrow 2\varphi(x) - x = x$

$\Leftrightarrow 2\varphi(x) = 0$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = 0$

$\Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} \varphi.$

Donc $1 \in Sp(s)$ et $E_1(s) = \operatorname{Ker} \varphi.$

Partie 3

2)a) • $x \in (\operatorname{Ker}(p))^\perp$

• $p(x) - x \in \operatorname{Ker} p$

Donc $\langle \underbrace{x}_{\in (\operatorname{Ker} p)^\perp}, \underbrace{p(x) - x}_{\in \operatorname{Ker} p} \rangle = 0.$

$= \langle x, p(x) \rangle - \|x\|$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\boxed{Ex\ 4}$ Partie 1

1) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

donc $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ et $\mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}$

$\mathbb{P}(X+Y=k) = \mathbb{P}([X=k] \cap [Y = n-k])$

$= \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k)$ par indépendance

$= \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \times \dfrac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}$