Copie anonyme - n°anonymat : 961179

V5-00252
961179
Maths B/L

Code épreuve : 284 | **Nombre de pages :** 18 | **Session :** 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 2

$u_n = \int_0^{\pi/2} x \sin(nx)(\cos(x))^n \, dx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) a) $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\sin(2x) = \sin(x+x) = \cos(x)\sin(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\cos(x)\sin(x)$

b) $u_1 = \int_0^{\pi/2} x \sin(x)\cos(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} x \sin(2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x \sin(2x)\, dx.$

On effectue une IPP

$= \frac{1}{2}\left(\left[x \cdot -\frac{1}{2}\cos(2x) \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos(2x)\, dx \right).$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)\cos(\pi) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x) \right]_0^{\pi/2} \right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(\pi) - \frac{1}{2}\sin(0) \right) \right)$

$= \frac{\pi}{8}$

2) $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{1-(1-t)^n}{t} & t \in \mathbb{R}^* \\ n & t = 0 \end{cases}$

a) $f_2(t) = \begin{cases} \frac{1-(1-t)^2}{t} & t \in \mathbb{R}^* \\ 2 & t = 0 \end{cases}$

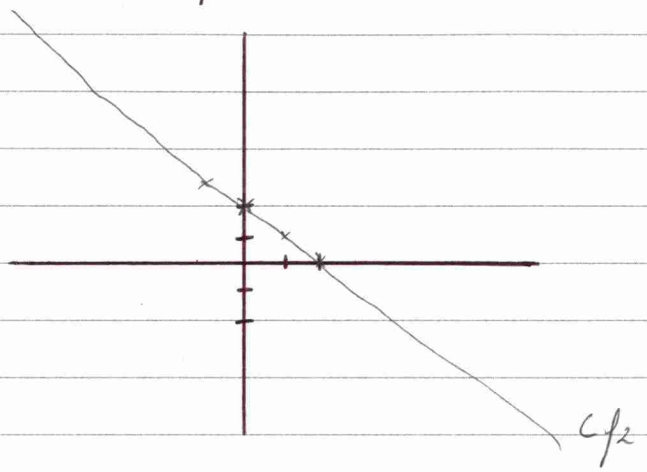
On étudie la fonction f_2.

f_2 dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par somme de fonctions dérivables,

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f_2'(t) = \dfrac{(2-2t)t - (2t-t^2)}{t^2} = \dfrac{2t-4t^2-2t+t^2}{t^2}$

$= \dfrac{-3t^2}{t^2} = -3 < 0$

On a donc f_2 décroissante.



$f_2(0) = 2$ $f_2(-1) = 3$

$f_2(1) = 1$

$f_2(2) = 0$

$\lim\limits_{t \to +\infty} f_2(t) = -\infty$

$\lim\limits_{t \to -\infty} f_2(t) = +\infty$

5) $f_3(t) = \begin{cases} \dfrac{1-(1-t)^3}{t} & t \in \mathbb{R}^* \\ 3 & t = 0 \end{cases}$

f_3 dérivable par somm

$\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f_3'(t) = \dfrac{(3(1-t)^2 \cdot t) - (1-(1-t)^3)}{t^2}$

$= \dfrac{3t(1-t)^2 - 1 + (1-t)^3}{t^2} = \dfrac{(1-t)^2(3t+1-t)-1}{t^2}$

$= \dfrac{(1-t)^2(2t+1)-1}{t^2}$

c) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

On veut donc montrer que $\lim_{t \to 0} f_n(t)$ existe et $\lim_{t \to 0} f_n(t) = n$

$\forall t \in \mathbb{R}^*$ $f_n(t) = \dfrac{1-(1-t)^n}{t}$

On reconnait un développement limité.

$(1-t)^n \underset{t \to 0}{=} 1 - nt + o(t)$

Ainsi, $f_n(t) = \dfrac{1-(1-nt+o(t))}{t} = \dfrac{nt+o(t)}{t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} n$

On a $\lim_{t \to 0} f_n(t) = n$ donc la fonction est $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}$.

d) f_n dérivable en 0 $\iff \lim_{t \to 0} \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}$ existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_n(t)-f_n(0)}{t-0} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1-(1-t)^n}{t} - n}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1-(1-t)^n - nt}{t}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1-(1-t)^n-nt}{t} \times \frac{1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1-(1-t)^n-nt}{t^2}$$

On effectue un développement limité à l'ordre 2. Ainsi, $(1-t)^n \underset{t \to 0}{=} 1 - nt + \dfrac{n(n-1)t^2}{2}$

Ainsi, $\lim \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t \to 0} \dfrac{1-1+nt-\frac{n(n+1)t^2}{2}-nt}{t^2} = \lim_{t \to 0} \dfrac{-\frac{n(n+1)t^2}{2}}{t^2} = -\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ainsi, $f_n'(0) = -\dfrac{n(n+1)}{2}$.

e) Mq $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1}$

3) $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

2) $I_1 = \int_0^1 f_1(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1-(1-t)}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{t}{t}\,dt = \int_0^1 1\,dt = 1$

$I_2 = \int_0^1 f_2(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^2}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{1-(1-2t+t^2)}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{2t-t^2}{t}\,dt$

$= \int_0^1 2-t\,dt = \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$I_3 = \int_0^1 f_3(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^3}{t} = \int_0^1 \frac{1-(1-3t+3t^2-t^3)}{t}\,dt$

$= \int_0^1 \frac{3t-3t^2+t^3}{t}\,dt = \int_0^1 3-3t+t^2\,dt.$

$= \left[3t - 3\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}$

$= \frac{18-9+2}{6} = \frac{11}{6}$

3) $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k} t^{k-1}\,dt.$

$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k} \int_0^1 t^{k-1}\,dt$.

$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k}\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{k}\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

c) $\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,dt$

On retrouve une primitive facilement avec la formule $(u(x)^\alpha)' = \alpha \cdot u'(x) \cdot u(x)^{\alpha-1}$

Ainsi, $\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,dt = \left[-\frac{1}{k}(1-t)^k\right]_0^1 =$

$= \frac{1}{k}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 961179

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | **Nombre de pages :** 18 | **Session :** 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d/ Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

e) On a $I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

On I_n diverge grossièrement selon le critère de convergence de Riemann.

$\lim_{n \to +\infty} I_n = +\infty$.

h) a) Mq $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{\pi/2} x \sin(2px)\,dx = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}$.

On a $\int_0^{\pi/2} x \sin(2px)\,dx = \left[x \cdot \frac{-1}{2p}\cos(2px)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2p}\cos(2px)\,dx$

$= \frac{-\pi}{4p} \cdot \cos(\pi p) + \frac{1}{2p}\int_0^{\pi/2} \cos(2px)\,dx$

$= -\frac{\pi}{4p}\cos(\pi p)$; $= \frac{1}{2p}\left[\frac{1}{2p}\sin(2px)\right]_0^{\pi/2} = 0 \ \forall p \in \mathbb{N}^*$.

Or $\cos(\pi p) = 1$ si $p = 2k$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$\cos(\pi p) = -1$ si $p = 2k+1$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

Ainsi, $\frac{-\pi}{4p}\cos(\pi p) = \frac{\pi}{4p}\cdot(-1)^{p+1}$ par récurrence immédiate vérifiée avec $p=1$

donc $\int_0^{\pi/2} x\sin(2px)\,dx = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}$

3)

Partie B

5) $x \in [0,1[$, $\forall t \in \mathbb{R}-\{1\}$, $\varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t}$

2) φ_x dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par quotient.

$\forall t \in \mathbb{R}-\{1\}$, $\varphi_x'(t) = \frac{-1(1-t)-(x-t).-1}{(1-t)^2} = \frac{-1+t+x-t}{(1-t)^2}$

$= \frac{x-1}{(1-t)^2}$

On a $\forall t \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\varphi_n'(t) = \dfrac{n-1}{(1-t)^2}$

Or, $n \in [0;1[$, donc $n-1 < 0$

donc $\varphi_n'(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{1\}$.

t	$-\infty$		1		$+\infty$
φ_n'		$-$	‖	$-$	
φ_n	1	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	1

$\lim\limits_{t \to -\infty} \varphi_n(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_n(t) = 1$

$\lim\limits_{t \to 1^\ominus} \varphi_n(t) = -\infty$

$\lim\limits_{t \to 1^\oplus} \varphi_n(t) = +\infty$

b) Mq $\forall n \in [0,1[$, $\forall t \in [0,n]$, $0 \leq \varphi_n(t) \leq n$.

Mq $\forall n \in [0,1[$, $\forall t \in [0,n]$, $\varphi_n(t) - n \leq 0$

$\forall t, \forall n$, $\varphi_n(t) - n = \dfrac{n-t}{1-t} - n = \dfrac{n-t-n(1-t)}{1-t} = \dfrac{n-t-n+nt}{1-t}$

$= \dfrac{nt-n}{1-t}$

Or, $1-t > 0$ car $t \in [0,n]$ et $n < 1$

et $nt < n$ car $n \in [0,1[$ et $t \in [0,n]$

donc $\varphi_n(t) - n \leq 0$

et donc $\varphi_{(n)}(t) \leq n$.

Par ailleurs, $\varphi_n(t) = \dfrac{n-t}{1-t}$, or, $\forall t \in [0,n]$, $n-t \geqslant 0$ et $1-t \geqslant 0$ car $n < 1$

donc $\varphi_n(t) \geqslant 0$

On a bien l'encadrement $\forall n \in [0,1[$ et $\forall t \in [0,n]$

$0 \leq \varphi_n(t) \leq n$.

c) On cherche a tq $\forall n \in [0,1[$, $\forall t \in [0,n]$,

$\dfrac{\varphi_n(t)}{1-t} = \dfrac{n-1}{(1-t)^2} + \dfrac{a}{(1-t)}$

$$\frac{\varphi_n(t)}{(1-t)} = \frac{x-t}{1-t} \times \frac{1}{(1-t)} = \frac{x-t}{(1-t)^2}$$

$$\frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{a}{1-t} = \frac{x-1+a(1-t)}{(1-t)^2} = \frac{x-1+a-at}{(1-t)^2}$$

en prenant $a = 1$, on a l'égalité.

6) 2) $\forall x \in [0,1[$, $h(x) = -\ln(1-x)$

h est dérivable par somme et composée.

$\forall x \in [0,1[$, $h'(x) = -\dfrac{-1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} > 0$

x	0		1
h'	$+$		
h	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} h(x) = +\infty$

$h(0) = 0$

4) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1[$, $h(x) = \sum \frac{x^k}{k} + R_n(x)$

$\forall x \in [0,1[$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\,dt$ On reconnaît une somme géométrique

$= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt$

$$\sum \frac{x^k}{k} + R_n(x) = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} + \frac{(\varphi_n(t))^n}{1-t}\,dt.$$

$$= \int_0^x \frac{(1-t^n) + \varphi_n(t)^n}{1-t}\,dt.$$

$$= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} + \frac{(x-t)^n}{(1-t)^n} \times \frac{1}{(1-t)}\,dt.$$

$$= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} + \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,dt$$

Il semblerait que ce soit égal à

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x) = h(x)$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 961179

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | **Nombre de pages :** 18 | **Session :** 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1

Partie A

$a \in \mathbb{R}$, $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} a\,5^{-x} & x > 0 \\ a\,5^{x} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$

1/ f est une densité donc son intégrale converge et est égale à 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \iff \int_{-\infty}^{0} a\,5^{t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} a\,5^{-t}\,dt = 1.$$

$$\iff a\int_{-\infty}^{0} e^{t\ln(5)}\,dt + a\int_{0}^{+\infty} e^{-t\ln(5)} = 1.$$

$$\iff a\left[\frac{1}{\ln(5)}e^{t\ln(5)}\right]_{B}^{0} + a\left[\frac{-1}{\ln(5)}e^{-t\ln(5)}\right]_{0}^{A} = 1.$$

$$\iff a\left(\frac{1}{\ln(5)} - \frac{1}{\ln(5)}e^{B\ln(5)}\right) + a\left(\frac{-1}{\ln(5)}e^{-A\ln(5)} + \frac{1}{\ln(5)}\right) = 1$$

Or, $\lim_{B \to -\infty} e^{B\ln(5)} = 0$ et $\lim_{A \to +\infty} e^{-A\ln(5)} = 0$

Ainsi, on cherche a tq $\frac{a}{\ln(5)} + \frac{a}{\ln(5)} = 1$.

$$\iff \frac{2a}{\ln(5)} = 1 \iff a = \frac{\ln(5)}{2}$$

2) On cherche la fonction de répartition de X.

$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

si $x \leq 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} a\,5^t\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{\ln(5)}{2} e^{t\ln(5)}\,dt$.

$= \frac{1}{2}\left[e^{t\ln(5)}\right]_{\beta}^{x} = \frac{1}{2}e^{x\ln(5)} - \frac{1}{2}e^{\beta\ln(5)}$

$= \frac{1}{2}e^{x\ln(5)}$; $\frac{1}{2}e^{\beta\ln(5)} \to 0$ quand $\beta \to -\infty$

si $x > 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{0} a\,5^t\,dt + \int_{0}^{x} a\,5^{-t}\,dt$.

$= \frac{1}{2}\left[e^{t\ln(5)}\right]_{\beta}^{0} + \int_{0}^{x} \frac{\ln(5)}{2} e^{-t\ln(5)}\,dt$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[-e^{-t\ln(5)}\right]_{0}^{x}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x\ln(5)} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-x\ln(5)}$

Ainsi, $F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x\ln(5)} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x\ln(5)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3)

Partie B.

$\lambda \in \mathbb{R}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda}{(2+x)^2} & x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$

1) g est une densité donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 1$.

$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\lambda}{(2+t)^2}\,dt = 1 \quad \Leftrightarrow \lambda \int_0^1 \frac{1}{(2+t)^2}\,dt = 1$

$\Leftrightarrow \lambda \int_0^1 (2+t)^{-2}\,dt = 1 \quad \Leftrightarrow \lambda \left[\frac{-1}{2+t}\right]_0^1 = 1.$

[illegible]

$\Leftrightarrow \lambda\left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda\left(\frac{1}{6}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 6.$

2) $F_Z(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt.$

si $x < 0$, $F_Z(x) = 0$

si $x \in]0,1]$, $F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt.$

$= 6\int_0^x \frac{1}{(2+t)^2}\,dt = 6\left[\frac{-1}{2+t}\right]_0^x$

$= \frac{-6}{2+x} + \frac{6}{2} = 3 - \frac{6}{2+x}$

si $x > 1$, $F_Z(x) = \int_0^1 g(t)\,dt = 1.$

Ainsi, $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{-6}{2+x} + 3 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3) $Z(\Omega) =]0,1[$, $Y = 2 + \frac{1}{Z}$

[illegible]. $Y(\Omega) = \mathbb{R}^*$

4) $F_Y(x) = P(Y \leq x)$

$= P(Z + \frac{1}{2} \leq x)$

$= P(Z^2 + Z \leq Zx)$

$= P(Z^2 + Z - Zx \leq 0)$

$= P(Z(Z+1-x) \leq 0)$

Or, $P(Z \leq 0) = 0$ donc

on cherche $P(Z \geq 0) \times P(Z+1-x \leq 0)$

$P(Z+1-x \leq 0) = P(Z \leq x+1)$

Ainsi, $P(Z^2 + Z - Zx \leq 0) = (1 - P(Z<0)) \times P(Z \leq x+1)$

$= P(Z \leq x+1)$.

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{6}{3+x} + 3 & x \in]0,1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to -\infty} F_Y(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} F_Y(x) = 1$

$F_Y(x)$ est C^1 donc c'est bien une fonction de répartition

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 961179

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 18 | Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 4

1) E_n est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel car :
- la matrice nulle appartient à l'espace.
- $E_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- E_n est stable par combinaison linéaire selon les propriétés matricielles de somme et de multiplication : si A et $B \in E_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda A + B \in E_n$

2) $n = 2$.

a) $A(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda \in Sp(A(1,1)) \iff A - \lambda I_2$ non inversible.

$\iff \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\iff \lambda^2 - 1 = 0 \implies Sp(A(1,1)) = \{-1, 1\}$

b) $A(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $(A - \lambda I_2)$ non inversible

$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$

On cherche λ tq $\lambda^2 + 1 = 0$

$\iff \lambda^2 = -1$

Pas de solution dans $\mathbb{R}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) Toutes les matrices de E_2 sont inversibles car leur rang est égal à 2. Néanmoins la matrice nulle ~~est~~ est un contre-exemple car $\dim \ker(0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}) = 2$

d) Elles ne sont pas toutes diagonalisables sur $\mathbb{R}$ car certaines ont leur valeur propre qui n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$.
Par exemple, $A(1,-1)$ n'admet pas de valeur propre dans $\mathbb{R}$, mais seulement dans $\mathbb{C}$, elles ne sont donc pas toutes diagonalisables dans $\mathbb{R}$

e) $A(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \in sp(A(\lambda_1, \lambda_2)) \Leftrightarrow \mu^2 - \lambda_1\lambda_2 = 0$

. Ainsi, . si $\lambda_1\lambda_2 > 0$, la matrice admet 2 valeurs propres dans $\mathbb{R}$.
. si $\lambda_1\lambda_2 < 0$, la matrice n'admet pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$, mais peut avoir dans $\mathbb{C}$.
. si $\lambda_1\lambda_2 = 0$, la matrice admet que 0 comme valeur propre.

f) $A(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si $\lambda = 0$ alors $\dim \ker(A(0,\lambda)) = 2$ et donc la matrice est diagonalisable car $\dim E_0^A = 2$.
Elle est également nécessaire car la seule valeur propre possible est 0, il faut donc que le noyau de A soit de dim = 2.

g) $A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & X(\omega) \\ Y(\omega) & 0 \end{pmatrix}$

la probabilité de l'événement $A(\omega)$ est diagonalisable sur Ω.

X et Y suivent loi géométrique de paramètre p.

donc $P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$.

h) X et Y ↳ $\mathcal{P}(1)$ $\quad P(X=k) = e^{-1} \times \frac{1^k}{k!}$

3) a) $n=3$.

$$A(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\ker(A(1,1,1)) = \{0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}\}$

donc la matrice est inversible.

b) $1 \in sp(A(1,1,1)) \Rightarrow A - I_3$ non inversible.

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$X \in \ker(A - I_3) \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \end{cases}$

$\ker(A - I_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

donc elle n'est pas inversible. $1 \in sp(A)$.

$\Rightarrow -1 \in sp(A(1,1,1)) \Rightarrow (A + I_3)$ non inversible.

$$(A + I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \ker(A + I_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

donc pas inversible

donc $-1 \in sp(A)$

c) On voit que -1 et 1 sont les 2 seules valeurs propres de la matrice car la somme des dim de leurs sous espace propre est 3.

d) En prenant $u_1 = (1,0,1)$ $\quad (u_1, u_2) = (u_1, u_3) = (u_2, u_3) = 0$

$u_2 = (0,1,0)$

$u_3 = (1,0,-1)$

on a (u_1, u_2, u_3) forment une base orthogonale car orthogonaux entre eux et dim famille égal 3.

en posant $v_1 = \frac{u_1}{\sqrt{2}}$

$v_2 = u_2$

$v_3 = \frac{u_3}{\sqrt{2}}$

On a (v_1, v_2, v_3) une base orthonormée

e). $A(1,1,1)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car la somme des dimensions de ses sous espaces propre est égale à 3.

4) a) $A(\lambda)A(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & & & \lambda_n \\ & & \iddots & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ \lambda_1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & \mu_n \\ & & \iddots & \\ & \mu_2 & & 0 \\ \mu_1 & & & \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_n\mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{n-1}\mu_2 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \lambda_1\mu_n \end{pmatrix}$$

b) ~~$A(\lambda)$ inversible~~ Si $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sont tous non nuls, alors $A(\lambda)$ est inversible et c'est une condition nécessaire et suffisante.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 961179

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 18 | Session : 2024

Épreuve de : Maths

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On cherche A^{-1} tq $AA^{-1} = I_n$.

En prenant $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & \frac{1}{d_1} \\ & \iddots & \\ \frac{1}{d_n} & & 0 \end{pmatrix}$ (avec $1/d_{n-1}$ sur l'antidiagonale)

On a bien $A^{-1}A = I_n$ et donc A^{-1} l'inverse de A (b)

5) a) F_k sev de $\mathbb{R}^n$ car non vide, stable par combinaison linéaire.

Par ailleurs, $f_d(e_k) = 0$ si $k \neq n+1-k$.

$$f_d(e_{n+1-k}) = d_k \cdot (e_{n+1-k})$$

c'est donc stable par f_d.

$\dim F_k = 2$.

b) On admet.

c) $A(1,2,\dots,n) = \begin{pmatrix} 0 & & n \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ (avec 2, 3 sur l'antidiagonale)

les valeurs propres de A sont sur sa diagonale. $sp(A) = \{1,2,\dots,n\}$.

Elle admet n valeurs propres dans $\mathbb{R}$ et est de taille n
donc est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

/