Copie anonyme - n°anonymat : 335112

E5-00089 335112 Maths B/L

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 16 | Session : 2024

Épreuve de : MATHEMATIQUES B/L ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Excercice 4 :

1. * $E_m \subset M_m(\mathbb{R})$

* $E_m$ non-vide si $\forall i \in [\![1,m]\!], \lambda_i = 0$

$A(0,\dots,0) = 0_{M_m(\mathbb{R})}$

* $\alpha \in \mathbb{R}$ $A \in M_m(\mathbb{R})$, $A(\lambda) = A(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ avec $(\lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m$

$B \in M_m(\mathbb{R})$, $B(\lambda') = B(\lambda'_1,\dots,\lambda'_m)$ a avec $(\lambda'_1,\dots,\lambda'_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\alpha A(\lambda) + B(\lambda) = \alpha \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \\ \vdots & & \lambda_2 & \vdots \\ \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda'_m \\ 0 & & \lambda'_2 & \vdots \\ \lambda'_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha\lambda_m + \lambda'_m \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & \alpha\lambda_2 + \lambda'_2 & & \\ \alpha\lambda_1 + \lambda'_1 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \in E_m$$

$\in M_m(\mathbb{R})$

Donc $E_m$ un s-e-v de $M_m(\mathbb{R})$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Donc $E_m$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

~~$A(\lambda)$~~ $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ application linéaire associée à $A(\lambda)$

$(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \mapsto (\alpha_m\lambda_m,\dots,\alpha_1\lambda_1)$ avec $(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in \mathbb{R}^m$.

Comme les $\alpha_i\lambda_i$ sont colinéaires $(i \in [\![1,m]\!])$,
Une base de $E_m$ est $\mathrm{Vect}((\alpha_i\lambda_i))$ famille libre (vecteur nonnul) et génératrice.

2) a) $A(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ ~~$\lambda^2 + Tr$~~ $\lambda^2 - \lambda \mathrm{Tr}(A(1,1)) + \det(A(1,1)) = \cancel{\lambda^2 + \lambda}$

$\lambda^2 - 1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~$\lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda^2=-1$~~

~~$\Leftrightarrow \lambda \notin \mathbb{R}$~~

~~$A(1,1)$ n'a pas de valeurs propres réelles~~

~~let~~ $\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2=1$

$\Leftrightarrow \lambda=\pm 1$

$Sp(A(1,1))=\{-1,1\}$

b) $A(1,-1)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda^2-\lambda Tr(A(1,-1))+\det(A(1,-1))=\lambda^2+1$

$\lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda^2=-1$

$A(1,-1)$ n'a pas de valeurs propres réelles

c) $A(0,1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_2$

$0 \in Sp(A(0,1)) \Rightarrow A(0,1)$ non inversible

Toutes les matrices de $\mathcal{E}_2$ ne sont pas inversibles.

d) ~~$Sp(A(1,1))=\{-1,1\}$ et $A($~~

$A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A(0,1)$ . $Sp(A(0,1))=\{0\}$.

$\in \mathcal{E}_2$

$A(0,1)$ diagonalisable $\Leftrightarrow A(0,1)=0\cdot I_2$

Or $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $A(0,1)$ non diagonalisable.

Toutes les matrices de $\mathcal{E}_2$ ne sont pas diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

e) $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha^2 - \alpha \operatorname{Tr}(A(\lambda_1,\lambda_2)) + \det(A(\lambda_1,\lambda_2)) = \alpha^2 - \lambda_1\lambda_2$

$\alpha^2 - \lambda_1\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \lambda_1\lambda_2$

si $\lambda_1\lambda_2$ sont de signe négatif $\lambda_1\lambda_2 \geq 0$

et $\lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

donc $A(\lambda_1,\lambda_2)$ admet deux valeurs propres.

De même si $\lambda_1 \lambda_2$ sont de signe positif.

Si $\lambda_1$ n'est pas du même signe que $\lambda_2$ alors il n'y a pas de valeurs propres réelles à $A(\lambda_1,\lambda_2)$.

f) $A(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot I_2$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$. car $0$ unique valeur propre de $A(0,\lambda)$.

g) $\Omega \subset \mathbb{N}^*$ car $X$ et $Y$ suivent des lois géométriques

donc $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ prennent des valeurs strictement positives.

$A(\omega)$ diagonalisable si $X(\omega) \neq Y(\omega)$.

c'est à dire si $P([X=\omega) \cap (Y=\omega]) = 0$

or indépendants

$P(X=\omega) \cdot P(Y=\omega) = 0 \Leftrightarrow (1-p)^{\omega-1} p \, (1-p)^{\omega-1} p = 0$

$\Leftrightarrow p^2 ((1-p)^{\omega-1})^2 = 0 \quad (p \neq 0)$

$\Leftrightarrow ((1-p)^{\omega-1})^2 = 0$

On a $P(X=\omega) \cdot P(Y=\omega) = 0 \Leftrightarrow \underline{((1-p)^{\omega-1})^2 = 0}$

h) $\Omega \subset \mathbb{N}$

$A(\omega)$ diagonalisable sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow X(\omega) = Y(\omega) = 0$

ou $\{X(\omega)\}$ et $Y(\omega)$ ~~de même signe~~ distincts

$P(X=\omega) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} \dfrac{\alpha^\omega}{\omega!} = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 0$ de même pour $P(Y=\omega) = 0$

Or $\alpha \neq 0$.

$P(X=\omega) \cdot P(Y=\omega) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{-\alpha} \dfrac{\alpha^\omega}{\omega!}\right)^2 = 0$

probabilité de l'événement semble nulle

3) a) $A(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3$$

A inversible et $A^{-1} = A(1,1,1)$.

b) $\cancel{A(1,1,1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =}$

$\cancel{X \in M_{3,1}(\mathbb{R})}$

$\cancel{AX = X \iff A(X - I_3) = 0}$

$\cancel{\iff}$

$E_1(A(1,1,1)) = \left\{ A(1,1,1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$

$$\begin{cases} z = x \\ y = y \\ x = z \end{cases}$$

$E_1(A(1,1,1)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ de dimension 2 car libre vecteurs non colinéaires donc base

donc $1 \in Sp(A(1,1,1))$.

$E_{-1}(A(1,1,1)) = ?$

$$\begin{cases} z = -x \\ y = -y \\ x = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

$E_{-1}(A(1,1,1)) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ de dimension 1.

Donc $-1 \in Sp(A(1,1,1))$.

c) $Sp(A(1,1,1)) = \{-1, 1\}$.

# Copie anonyme - n°anonymat : 335112

| | | |
|---|---|---|
| Code épreuve : 284 | Nombre de pages : | Session : 2024 |

Épreuve de : MATHEMATIQUES BL ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

3) d) $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \perp \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \perp \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \perp \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ des vecteurs propres de $A(1,1,1)$.

Donc $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ famille orthogonale.

$\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2} = \left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\| \quad \left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = 1.$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ famille orthonormale

de cardinal $3 = \dim M_{3,1}(\mathbb{R})$ et libre car orthogonale donc une base orthonormale de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

e) $A(1,1,1)$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et appartient à $\mathcal{E}_3$ car $\dim E_1(A(1,1,1)) + \dim E_{-1}(A(1,1,1)) = 3 = \dim M_3(\mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \in \mathcal{E}_3$

diagonalisable $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = 0 \cdot I_3$

ce qui est faux donc on a bien une matrice de $\mathcal{E}_3$ non diagonalisable sur $\mathbb{R}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4) a) $A(\lambda)A(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & & & \vdots \\ \lambda_1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_n \\ 0 & \vdots & & & 0 \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ 0 & \mu_2 & & & \vdots \\ \mu_1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_n \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{n-1}\mu_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & \lambda_1 \mu_n \end{pmatrix}$$

b) si $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ et $\lambda_i \neq 0$ et $\lambda_j \neq 0$.

Alors $A(\lambda)$ de rang $n$. donc inversible.
$(A(\lambda))^{-1} = A(\lambda)$. avec les $\lambda_i$ distincts deux à deux et non nuls

5) a) $\dim F_k = 2$ car $e_k \neq e_{n+1-k}$ deux vecteurs non colinéaires. $\mathrm{Card}(F_k) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ famille libre donc une base de $F$.
$F_k$ est un s-e-v de $\mathbb{R}^n$ car il s'écrit $\mathrm{Vect}(e_k, e_{n+1-k})$ $(k \in [\![1,n]\!]$.

Exercice 1 : Partie A :

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \iff \int_{-\infty}^{0} a5^{x}\,dx + \int_{B}^{+\infty} a5^{-x}\,dx = 1$ $(B>0)$.

$\int_{-\infty}^{0} a5^{x}\,dx = a\int_{-\infty}^{0} e^{x\ln(5)}\,dx$

$= a\left[\frac{1}{\ln(5)} e^{x\ln(5)}\right]_A^0$ $(A<0)$

$= a\left(\frac{1}{\ln(5)} \cancel{\ln(5)} - \frac{1}{\ln(5)} e^{A\ln(5)}\right) \xrightarrow[A\to-\infty]{} \frac{a}{\ln(5)}$

$\hookrightarrow B$ $a\int_B^C e^{-x\ln(5)}dx = a\left[\frac{-1}{\ln(5)} e^{-x\ln(5)}\right]_B^C$

$= a\left(\frac{-1}{\ln(5)} \underbrace{e^{-C\ln(5)}}_{\substack{C\to+\infty \\ \to 0}} + \underbrace{\frac{1}{\ln(5)} e^{-B\ln(5)}}_{\substack{B\to 0^+ \\ \to \frac{1}{\ln(5)}}}\right)$

$= \frac{a}{\ln(5)}$

On obtient $\frac{2a}{\ln(5)} = 1 \Leftrightarrow a = \underline{\frac{\ln(5)}{2}}$

2) $f'(x) = \begin{cases} -a\ln(5)e^{-x\ln(5)} & \text{si } x > 0 \\ a\ln(5)e^{x\ln(5)} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

~~On a~~ $f$ $x \mapsto a5^{-x}$ $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (car exponentielle $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto a5^{x}$ $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$.

$f$. $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Donc $F_X(x) = \begin{cases} -a\ln(5)e^{-x\ln(5)} & \text{si } x>0 \\ a\ln(5)e^{x\ln(5)} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

3) $E(X^2)$ existe $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge ~~existe~~ (T. de transfert)

$\int_{-\infty}^{0} x^2 a e^{x\ln(5)}dx$

I.P.P $\begin{cases} u': e^{x\ln(5)} \\ v: x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} u: \frac{1}{\ln(5)}e^{x\ln(5)} \\ v': 2x \end{cases}$

$a\left(\left[\frac{x^2e^{x\ln(5)}}{\ln(5)}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{2}{\ln(5)}\int_{-\infty}^{0} xe^{x\ln(5)}dx\right)$

$= a\left(0 - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{croissance} \\ \text{comparée}}}{0}\right.$ ~~$-2\ln(5)$) d'après (1)~~

I.P.P. $\begin{cases} u'(x): e^{x\ln(5)} \\ v(x): x \end{cases}$ $\begin{cases} u(x): \frac{1}{\ln(5)}e^{x\ln(5)} \\ v'(x): 1 \end{cases}$

~~$= -2a\ln(5)$.~~

$-2a\left(\left[\frac{x e^{x\ln(5)}}{\ln(5)}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\ln(5)}\int_{-\infty}^{0} e^{x\ln(5)}dx\right) \xrightarrow[\text{croissance comparée}]{} 2a.\frac{1}{\ln(5)\ln(5)}$

$$\int_0^{+\infty} x^2 a e^{-x\ln(5)} dx$$

I.P.P $\begin{cases} u' = e^{-x\ln(5)} \\ v = x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} u = \frac{-1}{\ln(5)} e^{-x\ln(5)} \\ v' = 2x \end{cases}$

$$a\left(\underbrace{\left[\frac{-x^2 e^{-x\ln(5)}}{\ln(5)}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \frac{2}{\ln(5)}\int_0^{+\infty} x e^{-x\ln(5)} dx\right)$$

$\longrightarrow +\infty$

$\longrightarrow 0$

(croissance comparée en $+\infty$).

I.P.P. $\begin{cases} u' \ e^{-x\ln(5)} \\ v : x \end{cases}$ $\begin{cases} u \ \frac{-1}{\ln(5)} e^{-x\ln(5)} \\ v' : 1 \end{cases}$

$$\frac{2a}{\ln(5)}\left(\underbrace{\left[\frac{-x e^{-x\ln(5)}}{\ln(5)}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{\ln(5)}\int_0^{+\infty} e^{-x\ln(5)} dx}_{\frac{1}{\ln(5)}}\right)$$

croissance comparée

$$\frac{2a}{\ln(5)} \cdot \frac{1}{(\ln 5)^2} = \frac{2a}{(\ln(5))^3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{2a}{\ln(5)^2} + \frac{2a}{\ln(5)^3}$$
$$= E(X^2).$$

Partie B :

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1 \iff \int_A^1 \frac{\lambda}{(2+x)^2} dx = 1$ $(A > 0)$

$$\iff \lambda\left[-\frac{1}{2+x}\right]_A^1 = 1$$

$$\iff \lambda\left(-\frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{2+A}}_{\frac{1}{2}}\right) = 1$$

$A \to 0^+$

$$-\frac{\lambda}{3} + \frac{1}{2} = 1 \iff -\frac{\lambda}{3} = \frac{1}{2} \iff \boxed{\lambda = -\frac{3}{2}}$$

# Copie anonyme - n°anonymat : 335112

| | | |
|---|---|---|
| Code épreuve : 284 | Nombre de pages : | Session : 2024 |

Épreuve de : MATHEMATIQUES B/L ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

2) $x \mapsto \dfrac{\lambda}{(2+x)^2}$ $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ ~~composition~~ de fonction usuelle

$x \mapsto 0$ $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$.

$f$ $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-(2x+4)\lambda}{((2+x)^2)^2} & \text{si } x \in ]0,1[ \\ 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[ \end{cases}$$

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{-\lambda(2x+4)}{(2+x)^4} & \text{si } x \in ]0,1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) $\left(Z + \dfrac{1}{Z}\right)(\Omega) = [2, +\infty[$.

4) ~~$f_X(x)$~~ $P\left(Z + \dfrac{1}{Z} \leq x\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \left(t + \frac{1}{t}\right) f(t)\, dt$ (Th. transfert

$$= \int_0^x \left(t + \frac{1}{t}\right)\left(\frac{\lambda}{(2+t)^2}\right) dt$$

$$= \lambda \left( \int_0^x \frac{t}{(2+t)^2} + \frac{1}{t(2+t)^2}\, dt \right)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5) $\int_{\cancel{1}}^{+\infty} \cancel{\mu}\, x + \frac{1}{x}\left(\frac{\lambda}{(2+x)^2}\right) dx = 1$ ?

Exercice 3 : Partie I)

1) $h$ croissante et bornée par théorème de convergence et comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(n) \in \mathbb{R}^+$, alors ~~h~~ admet une limite finie en $+\infty$, car elle est majorée.

2) $E(h(X))$ existe $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} h(k)\, P(X=k)$ converge quand $n \to +\infty$ par T. transfert.

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \leq 1$ et $\sum_{k=0}^{n} h(k) = l \in \mathbb{R}^+$ d'après 1

donc ~~$E(h(x)) \leq l$.~~ $\sum_{k=0}^{n} h(k)\, P(X=k) \leq l$.

donc $E(h(x))$ existe de même $E(h(Y))$ existe.

3) $\sum_{n=\cancel{0}}^{+\infty} h(n) - h(n-1) = \lim_{n\to+\infty} h(n) - h(0)$

$= l - h(0)$ par télescopage.

donc convergente pour $n \geq 1$.

4) $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1))\, P(X \geq n)}_{\geq 0} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} h(n) - h(n-1)$

$\leq l - h(0)$

par théorème de comparaison de séries à termes général positifs $\sum_{n=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1))(P(X \geq n)$ convergente.

5) ~~lim~~ $P(X \geq N+1) \leq \frac{E(X)}{N+1}$ (Inégalité de Markov).

Or $E(X)$ existe ~~car~~ si $X(\Omega)$ un ensemble fini.

On suppose $X(\Omega)$ fini et $E(X)$ existe.

$$0 \leq P(X \geq N+1) \leq \frac{E(X)}{N+1}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow N \to +\infty$$

$$0 \qquad \qquad 0$$

Par encadrement de limites.

$$\lim_{n \to +\infty} P(X \geq N+1) = 0.$$

6) $E(h(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) P(X=k)$

$\cancel{\leq h(0) +}$

$= h(0) P(X=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} h(k) P(X=k)$

$=$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1)) P(X \geq n) = \sum_{k=1}^{+\infty} h(n) P(X \geq n) - h(n-1) P(X \geq n)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{h(n) P(X \geq n) - h(n-1) P(X \geq n-1)}_{=\alpha}$$

qui doit se simplifier en
$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha (P(X=0))^{-1}$

ainsi par télescopage on obtiendrait $E(h(X))$.

7) $P(X \geq t) \leq P(Y \geq t)$.

$$h(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1)) P(X \geq n) \leq h(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1)) P(Y \geq n)$$

$\Rightarrow E(h(X)) \leq E(h(Y))$.

Partie II :

1) ~~$h_{m+1}(i) - h_m(i) = 0$ si $i < m$~~

$m = 0 \quad h_0(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < 0 \\ 1 & \text{si } i > 0 \end{cases}$

$m = 1 \quad h_1(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < 1 \\ 1 & \text{si } i > 1 \end{cases}$

$h_m'(i) = 0 \geq 0 \Rightarrow h_m$ (croissante)

$0 \leq h_m(i) \leq 1$ donc $h_m$ bornée.

2)

3) $m \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ par définition en admettant (2).
$X$ stochastiquement inférieure à $Y$.

4)

Partie III).

1) $P(X \leq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) \leq P(Y = k)$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) P(Y \geq k) \leq 1$

2) $P(X \leq Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) P(Z \geq k)$

$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) P(Y \geq k)$ car $P(X \geq k) \leq P(Y \geq k)$ et $Z \perp X$

$\leq P(X \leq Y)$.

3) D'après ce qui précède

Copie anonyme - n°anonymat : 335112

Emplacement QR Code

| Code épreuve : 284 | Nombre de pages : | Session : 2021 |
|---|---|---|

Épreuve de : Maths B/L ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4) /

Exercice 2 : Partie A :

1) a) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\sin(2x) = \cos^2(x) \sin(x)$

b) $u_1 = \int_0^{\pi/2} x \sin(x) \cos(x) \, dx$

2) a)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2)c) $t \mapsto \frac{1-(1-t)^n}{t}$ continue sur $]0,+\infty[$

$t \mapsto n$ continue sur $]-\infty, 0]$

$\cancel{\lim_{t \to 0^+} \frac{1-(1-t)^n}{t}}$ $\cancel{y = 1-t \Leftrightarrow t = y+1}$

$\cancel{\frac{1-(y)^n}{y+1} \xrightarrow[y \to 1^+]{} 0}$

$f_n$ continue sur $\mathbb{R}$

d) $\lim_{t \to 0} \frac{f_n(t) - f_n(0)}{t-0} = 1-(1-t)^n -$

~~f dérivable en~~ 0 car ~~f continue sur $\mathbb{R}$~~.

On suppose $f_n$ dérivable en 0.

$f_n'(t) = \frac{n(1-t)^{n-1} t - 1 + (1-t)^n}{t^2}$ $\underline{t \in \mathbb{R}^*}$

$\cancel{f_n'(0)}$ $\underline{t=0}$ $f_n'(t) = 0$

$f_n'(0) = 0$ si $t = 0$, $\emptyset$ sinon.

e)

3/a) $I_1 = (-1)^2 \binom{n}{1} t^0$

$= 1 \cdot n$

$= n$

$I_2 = I_1 + (-1)^3 \binom{n}{2} t^1$

$= n \cancel{*} - 1 \binom{n}{2} t$

$= \cancel{n^2 (n-1)} \; n - \frac{n(n-1)t}{2}$.

$I_3 = I_1 + I_2 + 1 \binom{n}{3} t^3$

$= n - \frac{n(n-1)t}{2} + \frac{n(n-1)(n-2) \times t^2}{6}$

b/ (I) $\cancel{n=0}$

$n = 1 \quad I_1 = \binom{n}{1} \frac{(-1)^0}{1}$

$= n$ (vraie)

(H) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on suppose $(P_n) : I_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ vraie

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ mq $(P_{n+1})$ vraie

$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \cancel{\frac{n+1}{k}} \binom{n+1}{k+1} \frac{(-1)^k}{k+1}$

c) $\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,dt = \left[\frac{1}{k}(1-t)^k\right]_0^1$

$= \frac{1}{k}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2}$

$= +\infty$.

<u>Partie B :</u>

5)a) $\varphi_x'(t) = \frac{-1+t-(x-t)(-1)}{(1-t)^2}$

$= \frac{-1+t+x-t}{(1-t)^2}$ $\quad (1-t)^2 \geq 0$

$\cancel{-1+t}$ $-1+x \geq 0 \iff x \geq 1$ or $x \neq 1$

| | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi_x'(t)$ | $-$ | \|\| | $-$ |
| Var de $\varphi_x$ | $\searrow$ | | |

5)c) $\frac{x-t}{1-t} = \cancel{\frac{x-1(1-t)+a(1-t)^2}{1-t}}$

$\frac{x-1+a(1-t)}{(1-t)^2} = \frac{x-1+a-at}{(1-t)^2}$

$(x-t)(1-t) = x-1+a-at$

$x - xt - t + t^2 = x - 1 + a - at \qquad t^2 + t(-1-x-a)$