Copie anonyme - n°anonymat : 729397

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 16	Session : 2024

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1

PARTIE A

(1). f est une densité de probabilité donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} a5^{-x}\,dx + \int_{-\infty}^{0} a5^{x}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} a5^{x}\,dx = a\int_{-\infty}^{0} e^{x\ln 5}\,dx = \frac{a}{\ln 5}\left[e^{x\ln 5}\right]_{-\infty}^{0}$$ car $(x\ln 5)' = \ln 5$

$$= \frac{a}{\ln 5}\left(e^{0} - 0\right)$$

$$= \frac{a}{\ln 5}$$

Or $\int_{0}^{+\infty} a5^{-x}\,dx = -\int_{0}^{-\infty} a5^{u}\,du = \int_{-\infty}^{0} a5^{u}\,du$

avec le changement de variable $u = -x$, $du = -dx$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{2a}{\ln 5} = 1$, donc $a = \frac{\ln 5}{2}$

(2) $X(\Omega) = \mathbb{R}$ car $f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Soit F_X la fonction de répartition de X. soit $t \in \mathbb{R}$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

si $t \leq 0$, $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} a\,e^{x\ln 5}\,dx$

$$= \frac{a}{\ln 5}\left[e^{x\ln 5}\right]_{-\infty}^{t}$$

$$= \frac{a}{\ln 5} e^{t\ln 5} = \frac{e^{t\ln 5}}{2} \quad \text{d'après (1)}$$

si $t \geq 0$, $F_X(t) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{t} f(x)\,dx$

$$= \frac{a}{\ln 5} + \int_{0}^{t} a e^{-x\ln 5}\,dx \quad \text{d'après (1)}$$

$$= \frac{a}{\ln 5} + \frac{a}{-\ln 5} \underbrace{\left[e^{-x\ln 5}\right]_{0}^{t}}_{(e^{-t\ln 5} - 1)}$$

$$= \frac{a - a(e^{-t\ln 5} - 1)}{\ln 5}$$

$$= \frac{2a - a e^{-t\ln 5}}{\ln 5}$$

$$= \frac{\ln 5}{2} \times \frac{1}{\ln 5}\left(2 - e^{-t\ln 5}\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-t\ln 5}}{2}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{t\ln 5}}{2} & \text{si } t < 0 \\[2ex] 1 - \dfrac{e^{-t\ln 5}}{2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

(3) X^2 admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge, d'après le théorème de transfert

soit $A > 0$, $\int_0^A x^2 a e^{-x \ln 5}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^A x^2 \ln 5\, e^{-x\ln 5}\, dx$

$\cancel{\int_{-A}^0 x^2 a 5^x\, dx = a \int_{-A}^0 x^2 e^{x \ln 5}\, dx}$

Or $\forall\, t \geq 0$, $\lambda e^{-\lambda t}$ est une densité de loi exponentielle Y paramètre λ,

ie $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1$

et $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$ d'après Koenig-Huygens

ie $\frac{1}{\lambda^2} = \int_0^{+\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t}\, dt - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$

ie $\frac{2}{\lambda^2} = \int_0^{+\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t}\, dt$

Donc si $\lambda = \ln 5$, $\int_0^{+\infty} x^2 \ln 5\, e^{-x \ln 5}\, dx = \frac{2}{(\ln 5)^2}$

Donc $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \frac{2}{2} \times \frac{1}{(\ln 5)^2}$

Et $\int_{-\infty}^0 x^2 a 5^x = -\int_{+\infty}^0 (-u)^2 a 5^{-u}\, du = \int_0^{+\infty} u^2 a 5^{-u}\, du = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$

avec le changement de variable $u = -x$, et $du = -dx$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \frac{2}{(\ln 5)^2}$

X^2 admet une espérance et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{(\ln 5)^2}$

Partie B

(1) g est une densité de probabilité donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\lambda}{(2+x)^2}\,dx = 1$

$$\int_0^1 \frac{\lambda}{(2+x)^2}\,dx = \lambda\left[-(2+x)^{-1}\right]_0^1 \quad \text{car } (x+2)' = 1$$

~~or $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$~~

$$= -\lambda\left[\frac{1}{2+x}\right]_0^1 = -\lambda\underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)}_{\underbrace{\frac{2}{6} - \frac{3}{6}}_{-\frac{1}{6}}} = \frac{\lambda}{6}$$

Donc $\frac{\lambda}{6} = 1$, ie $\lambda = 6$

(2) si $x \notin]0,1]$, $g(x) = 0$, donc $Z(\Omega) =]0,1]$

Soit $t \in]0,1]$.

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)\,dx = \int_0^t g(x)\,dx = \int_0^t \frac{6}{(2+x)^2}\,dx = \left[\frac{-6}{2+x}\right]_0^t$$

$$= \frac{-6}{2+t} + \frac{6}{2} = \frac{-12 + 6(2+t)}{2(2+t)} = \frac{3t}{2+t}$$

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{3t}{2+t} & \text{si } t \in]0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

(3) soit $h(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in]0,1]$

h est dérivable et $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \leq 0$ ~~car $x^2 \in]0,1]$~~,

car $x^2 \leq 1$, donc $\frac{1}{x^2} \geq 1$, donc $1 - \frac{1}{x^2} \leq 0$

Donc h est décroissante. $h(1) = 2$ et $\lim_{x \to 0^+} x + \frac{1}{x} = +\infty$

Donc h ~~est à v~~ : $]0,1] \to [2, +\infty[$

Donc si $Z(\Omega) =]0,1]$, $Y(\Omega) = [2, +\infty[$

Copie anonyme - n°anonymat : 729397

Code épreuve : 284	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

EXERCICE 2

Partie A

(1) (a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,

donc $\cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin x)^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

donc $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

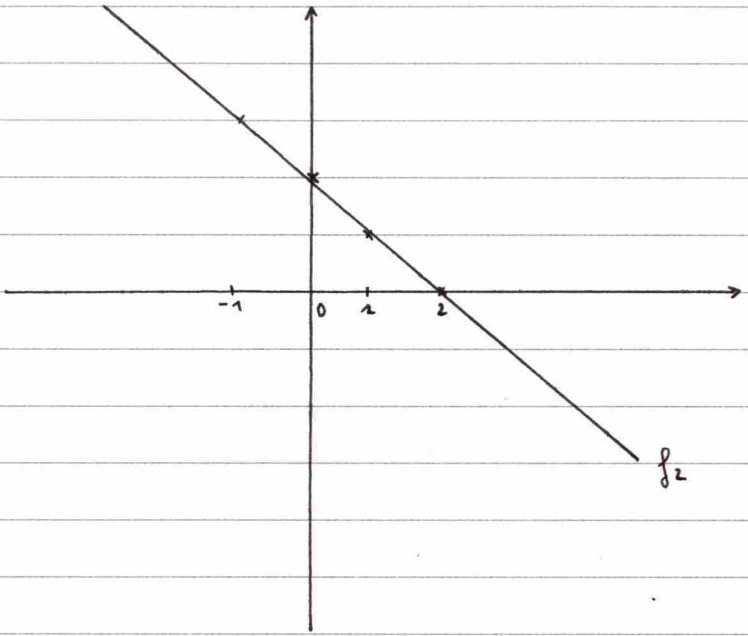
(b) $u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x)(\cos x) \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2} \sin(2x) \, dx$ d'après (1)

$=$

(2) (a) $f_2(t) = \begin{cases} \frac{1-(1-t)^2}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

or $\frac{1-(1-t)^2}{t} = \frac{1-1-t^2+2t}{t} = 2-t$



(b) $f_3(t) = \begin{cases} 3-3t+t^2 & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 3 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

car $\frac{1-(1-t)^3}{t} = \frac{1-(1+t^2-2t-t-t^3+2t^2)}{t}$

$= \frac{3t-3t^2+t^3}{t} = 3-3t+t^2$

ie $f_3(t) = 3-3t+t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Delta = 9-4\times 3 = -3 < 0$ donc $f_3(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$f_3(t)' = -3+2t = 0$ ssi $t = \frac{3}{2}$ ie $\frac{3}{2}$ est un point critique

$f_3(t) - f_3\left(\frac{3}{2}\right) = \cancel{3} - 3t + t^2 - \cancel{3} + \underbrace{\frac{9}{2} - \frac{9}{4}}_{\frac{18-9}{4} = \frac{9}{4}}$

(c) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, $f_n(t)$ est continue comme quotient de produit de fonctions continues.

~~d'après (e) $t \neq 0$, $\frac{1-(1-t)^n}{t} = 1 -$~~

~~D'après (e), si $t = 0$, $f_n(0)$~~

(e) soit $t \neq 0$, $f_n(t) = \dfrac{1-(1-t)^n}{t}$

$$= \frac{1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-t)^k}{t} \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton}$$

$$= \frac{1}{t} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{k-1}$$

$$= \frac{1}{t} - \underbrace{\binom{n}{0} (-1)^0 t^{-1}}_{\frac{1}{t}} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{k-1}$$

$$= - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} t^{k-1}$$

si $t = 0$, ~~cette somme vaut $\sum_{k=1}^{n}$~~ alors tous les termes de cette somme sont nuls sauf le terme en $k=1$, qui vaut $\binom{n}{1} (-1)^2 \times 1 = n$

ie $n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1} = f_n(0)$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} t^{k-1}$

(c) D'après (e) $\lim_{t \to 0^*} \dfrac{1-(1-t)^n}{t} = \lim_{t \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} t^{k-1} = n$

Donc f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

(3) (a) $I_1 = \int_0^1 f_1(t)\,dt = \int_0^1 (-1)^2 \binom{1}{1} t^0 \, dt = \int_0^1 1 \, dt = [t]_0^1 = 1.$

$I_2 = \int_0^1 \binom{2}{1} - \binom{2}{2} t \, dt = \int_0^1 2 - t \, dt = \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1$

$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$I_3 = \int_0^1 3 - \binom{3}{2} t + t^2 dt = \int_0^1 3 - 3t + t^2 \, dt = \left[3t - \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_0^1$

$= 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{18 - 9 + 2}{6} = \frac{11}{6}$

(b) $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$

$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1} \, dt$ d'après (2c)

$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \underbrace{\int_0^1 t^{k-1} \, dt}_{\underbrace{\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1}_{\frac{1}{k}}}$

$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ car $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$

(c) $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 (1-t)^{k-1} \, dt = \left[-\frac{(1-t)^k}{k}\right]_0^1$

$= \frac{1}{k}$ car $k \neq 0$

(d) D'après (3c) et (3b), $I_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \, dt$

$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 (t-1)^{k-1} \, dt$

$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\left[\frac{(t-1)^k}{k}\right]_0^1}_{-\frac{1}{k}}$

Code épreuve : 284	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

EXERCICE 2 . PARTIE B

(5) (a) $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t}$

Cette fonction est dérivable par ~~produit~~ quotient de fonctions dérivables, donc

$$\varphi_x'(t) = \frac{-(1-t) - (-1)(x-t)}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{-1+t+x-t}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{x-1}{(1-t)^2} < 0 \text{ car } x \in [0,1[$$

t	$-\infty$		1		$+\infty$
φ_x'		$-$	||	$-$	
φ_x	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

$\lim\limits_{t\to 1^-} \frac{x-t}{1-t} = -\infty$ car $\frac{1}{1-t} \to +\infty$ et $x-t<0$ car $x<1$

$\lim\limits_{t\to 1^+} \frac{x-t}{1-t} = +\infty$ car $\frac{1}{1-t} \to -\infty$ et $x-t<0$

$1-t \sim -t$ quand $t\to\pm\infty$ et $x-t \sim -t$ quand $t\to\pm\infty$ (car $\frac{x-t}{-t} = -\underbrace{\frac{x}{t}}_{\to 0}+1$)

Donc $\varphi_x(t) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{-t}{-t} = 1$, ie $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi_x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\varphi_x(t) = 1$

(6) soit $t\in[0,x]$, ~~ie $t \le x$~~

$0\le \varphi_x(t) \le x$ ssi $0 \le \frac{x-t}{1-t} \le x$

ssi $0 \le x-t \le x(1-t)$. car $1-t>0$ car $t\le x$

- $0\le x-t$ car $t\le x$
- $x-t \le x-xt$ ssi $t \ge tx$ ~~qui est vrai car x~~

  ssi $1\ge x$ (or $x<1$)

Donc $0\le\varphi_x(t)\le x$ si $t\in[0,x]$

(6) (a) $\forall x \in [0,1[,\ h(x) = -\ln(1-x)$

h est dérivable comme composition de fonctions dérivables et

$h'(x) = -\dfrac{(-1)}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} > 0$ car $x < 1$

x	0		1
h'		$+$	
h	0	$\nearrow$	$+\infty$

- $h(0) = -\ln(1) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} -\ln(1-x) = +\infty$ car $1-x \to 0^+$ ~~et lim~~

(6) (a) $k^2 \dfrac{x^k}{k} = kx^k \to 0$ quand $k \to +\infty$ car $x \in [0,1[$ et par croissances comparées

Donc $\dfrac{x^k}{k} = o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$

Or $\sum\limits_{k \geq 1} \dfrac{1}{k^2}$ converge d'après le critère de Riemann $(2>1)$

Donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs $\left(\dfrac{x^k}{k} > 0\ \forall k\right)$, la série de terme général $\dfrac{x^k}{k}$ converge. $\forall x \in [0,1[$.

EXERCICE 3

PARTIE 1

(1) en $+\infty$, h est croissante et majorée (car bornée), donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge, ie elle atteint une limite finie en $+\infty$

(2) ~~D'après le~~ $\sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\, \mathbb{P}(X=k) \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)}_{\leq 1 \text{ car } X(\Omega) \subset \mathbb{N}} \times M$ avec M la limite finie de h (d'après (1))

$\leq M$

Cette série est bornée donc elle converge. D'après le théorème du transfert, $\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\, \mathbb{P}(X=k)$. Donc $h(X)$ admet une espérance.

On procède de même pour $h(Y)$, car $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$ aussi.

(3) $\sum_{n\geq 1}^{i} h(n) - h(n-1) = h(i) - h(0)$ par télescopage

Or quand $i \to +\infty$, $h(i)$ a une valeur finie d'après (1)

Donc cette série converge

(6) $\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)\, \mathbb{P}(X=n)$ d'après (1)

$= \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)\big(\mathbb{P}(X\geq n) - \mathbb{P}(X\geq n+1)\big)$

(7) On suppose $X \leq_{st} Y$, ie $\forall t \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(X\geq t) \leq \mathbb{P}(Y\geq t)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(h(n)-h(n-1))\mathbb{P}(X\geq n) \leq (h(n)-h(n-1))\,\mathbb{P}(Y\geq n)$ car $h(n)-h(n-1) \geq 0$ car h croissante

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(h(n)-h(n-1)\big)\, \mathbb{P}(X\geq n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\big(h(n)-h(n-1)\big)\, \mathbb{P}(Y\geq n)$

Donc $\mathbb{E}(h(X)) \leq \mathbb{E}(h(Y))$ d'après (6), en ajoutant $+h(0)$.

Partie II

(1) h_n est bornée car $\forall i \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant h_n(i) \leqslant 1$.

h_n est croissante car si $i = n-1$, $h_n(i+1) - h_n(i) = 1 - 0 \geqslant 0$,

si $i < n-1$, $h_n(i+1) - h_n(i) = 0 - 0 = 0 \geqslant 0$

si $i > n-1$, $h_n(i+1) - h_n(i) = 1 - 1 = 0 \geqslant 0$.

Donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $h_n(i+1) - h_n(i) \geqslant 0$.

Partie III

(1) $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X \leqslant Y] \cap [X=k])$ d'après la formule des probabilités totales avec le système quasi complet d'événements $[X=k]_{k\in\mathbb{N}}$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y \geqslant k] \cap [X=k])$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\, \mathbb{P}(Y \geqslant k)$ par indépendance de X et Y

(2) $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\, \mathbb{P}(Y \geqslant k)$ d'après (1)

$\geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\, \mathbb{P}(X \geqslant k)$ car $X \leqslant_{st} Y$

$\geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\, \mathbb{P}(Z \geqslant k)$ car X et Z ont la même loi.

(3) $\mathbb{P}(Z \geqslant X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z \geqslant X] \cap [X=k])$ d'après la formule des probabilités totales

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z \geqslant k] \cap [X=k])$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant k)\, \mathbb{P}(X=k)$ par indépendance de X et Z

(4) $\mathbb{P}(Z = X) = \cancel{\mathbb{P}(Z \geqslant X) - \mathbb{P}(Z > X)}$

$\cancel{= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\, (\mathbb{P}(Z \geqslant k) - \mathbb{P}(Z > k))}$ ~~d'après (3)~~

$\cancel{= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)}$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z=X] \cap [X=k])$ d'après la formule des probabilités totales

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=k)\, \mathbb{P}(X=k)$ par indépendance de X et Z

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)^2$ car X et Z ont la même loi

> 0 car ces probabilités ~~sont toutes positives et~~ ne sont pas toutes nulles car $X(\Omega) = \mathbb{N}$

Copie anonyme - n°anonymat : 729397

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : | Session : 2024

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 4

(1) • $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{E}_n$ (~~A est la matrice nulle~~ $\lambda = 0_{\mathbb{R}^n}$) donc $\mathcal{E}_n$ est non vide

• soit $M, N \in \mathcal{E}_n$, $a \in \mathbb{R}$.

$$aM+N = a\begin{pmatrix} & & & b_n \\ & 0 & \iddots & \\ & b_2 & & 0 \\ b_1 & & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & & c_n \\ & 0 & \iddots & \\ & c_2 & & 0 \\ c_1 & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & ab_n+c_n \\ & 0 & \iddots & \\ & ab_2+c_2 & & 0 \\ ab_1+c_1 & & & \end{pmatrix}$$

ie $aM+N \in \mathcal{E}_n$, avec $\lambda = (ab_1+c_1 ; ab_2+c_2 ; \dots ; ab_n+c_n)$

Donc $\mathcal{E}_n$ est un s-espace vectoriel.

• Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$
$(A(e_1), \dots, A(e_n))$ est une base de $\mathcal{E}_n$.

(2) (a) $A(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda \in Sp\, A(1,1)$ ssi $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \notin Gl_2(\mathbb{R})$ ssi $\lambda^2 - 1 = 0$ ie $\lambda^2 = 1$

$Sp\, A(1,1) = \{-1, 1\}$

(b) $\lambda \in Sp\, A(1,-1)$ ssi $\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \notin Gl_2(\mathbb{R})$ ssi $\lambda^2 + 1 = 0$

Il n'existe pas de solution réelle de cette équation.

Donc $Sp\, A(1,-1) = \{\emptyset$

(c) Non. $A(0,0) \in E_2$, ie $A = 0_{M_2(\mathbb{R})}$

~~Déterminons ses valeurs propres. $\lambda \in Sp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ssi $\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \notin Gl_2(\mathbb{R})$~~

~~ssi $\lambda^2 = 0$ ie $\lambda = 0$~~

~~$Sp\, A(0,0)$~~

Or la matrice nulle n'est pas inversible, car $\forall B \in M_2(\mathbb{R})$, $AB = 0_{M_2(\mathbb{R})}$, ie il n'existe pas de matrice B telle que $AB = I_2$.

(d) $Sp\, A(1,-1) = \emptyset$ d'après (2), donc $A(1,-1)$ n'est pas diagonalisable.

Donc toutes les matrices de E_2 ne sont pas diagonalisables.

(e) $A(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$. $\lambda \in Sp\, A(\lambda_1, \lambda_2)$ ssi $\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda \end{pmatrix} \notin Gl_2(\mathbb{R})$

ssi $\lambda^2 - \lambda_1\lambda_2 = 0$ ssi $\lambda^2 = \lambda_1\lambda_2$

- Si $\lambda_1\lambda_2 < 0$, alors il n'existe pas de λ tq $\lambda^2 = \lambda_1\lambda_2$, ie $\# Sp\, A(\lambda_1,\lambda_2) = 0$.
- si $\lambda_1\lambda_2 = 0$, $\lambda^2 = 0$. donc $\# Sp\, A(\lambda_1,\lambda_2) = 1$ car $Sp\, A(\lambda_1,\lambda_2) = \{0\}$
- si $\lambda_1\lambda_2 > 0$, il existe deux λ tq $\lambda^2 = \lambda_1\lambda_2$, ie $\# Sp\, A(\lambda_1,\lambda_2) = 2$.

(f) $a \in Sp\, A(0,\lambda)$ ssi $\begin{pmatrix} -a & \lambda \\ 0 & -a \end{pmatrix} \notin Gl_2(\mathbb{R})$, ssi $a^2 - 0\times\lambda = 0$ ssi $a^2 = 0$

Donc $Sp\, A(0,\lambda) = \{0\}$

$A(0,\lambda)$ est diagonalisable ssi ~~$\dim Ker\, A(0,\lambda) = 2$~~ $\lambda = 0$ (car une matrice A qui a une seule valeur propre est diagonalisable a est diagonalisable ssi $A = aI_n$)

(3) $\lambda \in Sp\ A(1,1,1)$ ssi $\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \notin Gl_3(\mathbb{R})$

ssi $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_3$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \notin Gl_3(\mathbb{R})$

ssi $L_1 \leftrightarrow L_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \notin Gl_3(\mathbb{R})$

ssi $1-\lambda = 0$ ou $1-\lambda^2 = 0$ car une matrice triangulaire supérieure est inversible si tous les coefficients de sa diagonale sont nuls.

ssi $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$

$Sp\ A(1,1,1) = \{-1, 1\}$.

Donc il n'existe pas d'autres valeurs de λ telles que $A(1,1,1) - \lambda I_3 \notin Gl_3(\mathbb{R})$

Donc ~~avec~~ $A(1,1,1) - 0 I_3 \in Gl_3(\mathbb{R})$

ie $A(1,1,1)$ est inversible

(4) Réponse en (3)

(5) Réponse en (3)

(4) (a) $A(\lambda) A(\mu) = \begin{pmatrix} & & & \lambda_n \\ & 0 & \iddots & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ \lambda_1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \mu_n \\ & 0 & \iddots & \\ & \mu_2 & & 0 \\ \mu_1 & & & \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_n \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{n-1}\mu_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & \lambda_2 \mu_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \mu_n \end{pmatrix}$$

(b)