Copie anonyme - n°anonymat : 152292

A5-00007 152292 Maths B/L

Code épreuve : 2824 | Nombre de pages : | Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

EXERCICE 1 :

1) f est une densité de probabilité donc on doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} a5^{x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} a5^{-x}\,dx = 1.$$

$$\Leftrightarrow a\int_{-\infty}^{0} e^{x\ln 5}\,dx + a\int_{0}^{+\infty} e^{-x\ln 5}\,dx = 1.$$

$$\Leftrightarrow a\left[\frac{1}{\ln 5}e^{x\ln 5}\right]_{-\infty}^{0} + a\left[-\frac{1}{\ln 5}e^{-x\ln 5}\right]_{0}^{+\infty} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\ln 5}e^{0} - \frac{a}{\ln 5}e^{-x\ln 5} - \frac{a}{\ln 5}e^{-x\ln 5} + \frac{a}{\ln 5}e^{0} = 1$$

Or $e^{-x\ln 5} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par TCC (théorème des croissances comparées

donc on cherche a tq : $\frac{2a}{\ln 5} = 1 \Leftrightarrow 2a = \ln 5 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{\ln 5}{2}}$

2) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{si } x > 0.$$

$$= \int_{-\infty}^{0} a5^{t}\,dt + \int_{0}^{x} a5^{-t}\,dt.$$

$$= \frac{\ln 5}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{t\ln 5}\,dt + \frac{\ln 5}{2}\int_{0}^{x} e^{-t\ln 5}\,dt.$$

$$= \frac{\ln 5}{\alpha}\left[\frac{1}{\ln 5}e^{t\ln 5}\right]_{-x}^{0} + \frac{\ln 5}{\alpha}\left[-\frac{1}{\ln 5}e^{-t\ln 5}\right]_{0}^{x}$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \underbrace{\frac{1}{\alpha}e^{-x\ln 5}}_{\to 0 \text{ par TCC.}} - \frac{1}{\alpha}e^{-x\ln 5} + \frac{1}{\alpha}$$

$$= 1 - \frac{1}{\alpha}e^{-x\ln 5} \quad \text{si } x > 0.$$

si $x \leqslant 0$: $F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} a5^t\,dt = \frac{\ln 5}{\alpha}\int_{-\infty}^{x} e^{t\ln 5}\,dt$

$$= \frac{\ln 5}{\alpha}\left[\frac{1}{\ln 5}e^{t\ln 5}\right]_{-\infty}^{x}$$

$$= \frac{1}{\alpha}e^{x\ln 5} - \frac{1}{\alpha}e^{-x\ln 5} \quad \text{OR } e^{-x\ln 5} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} F(x) = 1 - \frac{1}{\alpha}e^{-x\ln 5} \text{ si } x > 0 \\ \\ f(x) = \frac{1}{\alpha}e^{x\ln 5} \text{ sinon} \end{array}}$$

3) Si X^2 admet une espérance, on a $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ par le théorème de transfert.

OR $\int_{-X}^{X} x^2 f(x)\,dx = \int_{-X}^{0} x^2 a5^x\,dx + \int_{0}^{X} x^2 a5^{-x}\,dx$.

$$= a\int_{-X}^{0} x^2 e^{x\ln 5}\,dx + a\int_{0}^{X} x^2 e^{-x\ln 5}\,dx.$$

OR $x^2 e^{x\ln 5} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par TCC donc par Riemann $\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x\ln 5}\,dx$ converge avec $\alpha > 1$.

En faisant un changement de variable avec $u = -x$, on a de la même façon une intégrale convergente donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge donc X^2 admet une espérance

$$E(X^2) = a\left(\left[\frac{x^2 e^{x\ln 5}}{\ln 5}\right]_{-X}^{0} - \int_{-X}^{0} 2x \times \frac{1}{\ln 5}e^{x\ln 5}\,dx\right) + a\left(\left[x^2\frac{e^{-x\ln 5}}{-\ln 5}\right]_{0}^{X} - \int_{0}^{X} 2x \times \left(\frac{-1}{\ln 5}\right)e^{-x\ln 5}\,dx\right)$$

$$= \underbrace{\frac{-aX^2 e^{-X\ln 5}}{\ln 5}}_{\to 0 \text{ par TCC}} - \frac{2a}{\ln 5}\int_{-X}^{0} xe^{x\ln 5}\,dx + \underbrace{\frac{aX^2 e^{-X\ln 5}}{-\ln 5}}_{\to 0 \text{ par TCC.}} + \frac{2a}{\ln 5}\int_{0}^{X} xe^{-x\ln 5}\,dx$$

$$= -\frac{2a}{\ln 5}\left(\left[\frac{x e^{x\ln 5}}{\ln 5}\right]_{-x}^{0} - \int_{-x}^{0}\frac{e^{x\ln 5}}{\ln 5}dx\right) + \frac{2a}{\ln 5}\left(\left[x\times\frac{e^{-x\ln 5}}{-\ln 5}\right]_{0}^{x} - \int_{0}^{x}\frac{e^{-x\ln 5}}{-\ln 5}dx\right)$$

$$= \frac{2a}{(\ln 5)^2}\left[\frac{1}{\ln 5}e^{x\ln 5}\right]_{-x}^{0} + \frac{2a}{(\ln 5)^2}\left[e^{-x\ln 5}\times\left(\frac{-1}{\ln 5}\right)\right]_{0}^{x}$$

$$= \frac{2a}{(\ln 5)^3} - \frac{2a}{(\ln 5)^3} = 0$$

Donc $\boxed{E(X^2)=0}$

Partie B

1) On regarde $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-x}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+x} f(x)dx = 1.$$

$$\Leftrightarrow \lambda\int_{0}^{1}\frac{dx}{(2+x)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \lambda\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2} + \lambda\int_{0}^{1}\frac{dx}{4x} + \lambda\int_{0}^{1}\frac{dx}{4} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \lambda\int_{0}^{1}x^{-2} + \frac{\lambda}{4}\left[\ln x\right]_{0}^{1} + \frac{\lambda}{4}\left[x\right]_{0}^{1} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{0}^{1} + \frac{\lambda}{4}\ln(1) - \frac{\lambda}{4}X + \frac{\lambda}{4} = 1. \quad \text{avec } X\to-\infty.$$

$$\Leftrightarrow -\lambda + \frac{\lambda}{4} - \underbrace{\frac{\lambda}{4}X}_{\to+\infty} = 1 \qquad X. \quad \text{car } \ln x \underset{x\to 0}{\to} -\infty.$$

2)

3) si $Z(\Omega) =]0,1]$, on a $Y = Z + \frac{1}{Z}$.

$\frac{1}{Z}(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $\boxed{Y(\Omega) = [1, +\infty[}$

EXERCICE 2

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{\pi/2} x \sin(nx)(\cos x)^n \, dx$.

PARTIE A

1) @ $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$ d'après les formules trigonométriques

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

$= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

ou $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$.

Donc $\boxed{\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1}$

$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x$

Donc $\boxed{\sin(2x) = 2\sin x \cos x}$

(b) $u_1 = \int_0^{\pi/2} x \sin x \cos x \, dx$.

$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin(2x) \, dx$.

$= \frac{1}{2} \left[x \times \frac{-\cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{(-\cos(2x))}{2} \, dx$.

$= \frac{-1}{4} \times \frac{\pi}{2} \times \cos(\pi) + \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi/2}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 152292

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : | Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

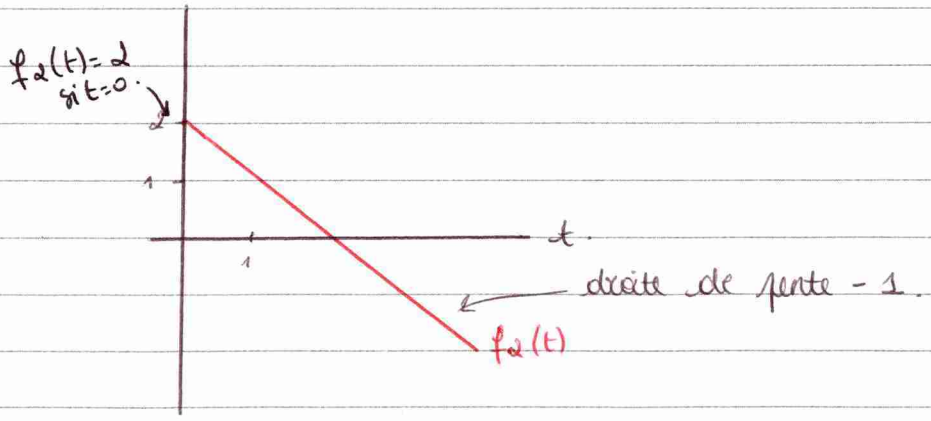
$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\sin\pi - \frac{1}{8}\sin(0)$

Donc $\boxed{u_1 = \frac{\pi}{8}}$

2) $f_n(t) = \begin{cases} \frac{1-(1-t)^n}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ n & \text{si } t = 0. \end{cases}$

a) $f_2(t) = \begin{cases} \frac{1-(1-t)^2}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 2 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

Or $\frac{1-(1-t)^2}{t} = \frac{1-(1-2t+t^2)}{t} = \frac{2t-t^2}{t} = 2-t.$



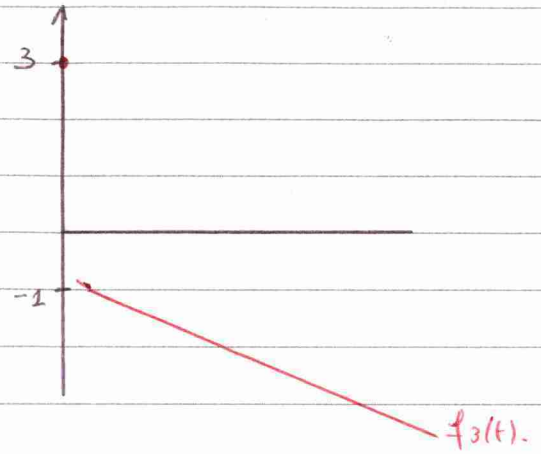
b) $f_3(t) = \begin{cases} \frac{1-(1-t)^3}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 3 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

Or $(1-t)^3 = (1-t)(1-t)^2 = (1-t)(1-2t+t^2)$

$= 1-2t+t^2-t+2t^2-t^3$

$= 1-3t+3t^2-t^3$

Donc $\frac{1-(1-t)^3}{t} = -3 + 3t - t^2$



(c) f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et quotient de fonction continue.
en 0 : $(1-t)^n \sim 1-nt$
donc $\frac{1-(1-t)^n}{t} \sim \frac{1-1+nt}{t} \sim n$ OR $f_n(t) = n$ si $t=0$

donc on a f_n continue sur $\mathbb{R}$ tout entier

(a) $\frac{f_n(t) - f_n(0)}{t-0} = \frac{\frac{1-(1-t)^n}{t} - n}{t} = \frac{1-(1-t)^n}{t^2} - \frac{n}{t}$

3) $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

(a) $I_1 = \int_0^1 f_1(t)\,dt$

OR d'après (2e), $f_1(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1}$

$= (-1)^2 \times 1 \times t^0 = 1$

donc $I_1 = \int_0^1 1 \times dt = [t]_0^1 = 1$ donc $\boxed{I_1 = 1}$.

$I_2 = \int_0^1 f_2(t)\,dt$.

OR $f_2(t) = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \binom{2}{k} t^{k-1}$

$= (-1)^2 \binom{2}{1} t^0 + (-1)^3 \binom{2}{2} t^1$

$= \frac{2!}{1!(2-1)!} - t = 2 - t$.

Donc $I_2 = \int_0^1 2 - t\,dt = \int_0^1 2\,dt - \int_0^1 t\,dt$

$= [2t]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$

$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ donc $\boxed{I_2 = 3/2}$.

$I_3 = \int_0^1 f_3(t)\,dt$

OR $f_3(t) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \binom{3}{k} t^{k-1}$

$= 2 - t + (-1)^4 \binom{3}{3} t^{3-1}$

$= 2 - t + t^2$.

Donc $I_3 = \int_0^1 2 - t + t^2\,dt = \int_0^1 2\,dt + \int_0^1 t^2\,dt - \int_0^1 t\,dt$.

$= [2t]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$

$= 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ donc $\boxed{I_3 = 11/6}$

(b) On a $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$

$I_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1}\,dt$ par (2e)

$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1}\,dt$ par linéarité de l'intégrale

$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 (-1)^{k+1} t^{k-1}$

$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \int_0^1 t^{k-1}\,dt$. - car $\binom{n}{k}$ et $(-1)^{k+1}$ sont des constantes.

Or $\int_0^1 t^{k-1} = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1 = \frac{1}{k}$.

donc on a $I_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. (question inachevée).

© $\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,dt$

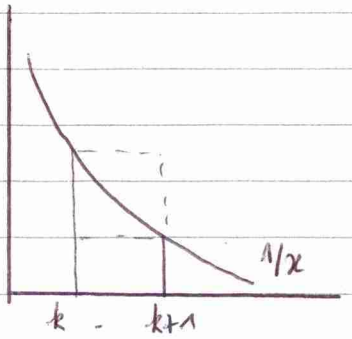
On pose $u = 1-t$ donc $\frac{du}{dt} = -1$ donc $dt = -du$.

On a donc : $\int_1^0 u^{k-1}(-du) = \int_0^1 u^{k-1}\,du = \left[\frac{u^k}{k}\right]_0^1 = \frac{1}{k}$.

Donc $\boxed{\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,dt = \frac{1}{k}}$

ⓓ

ⓔ Etudions $I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ en faisant une comparaison série-intégrale



On a $1 \times \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq 1 \times \frac{1}{k}$.

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$I_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq I_n$

par Chasles

8/20

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018751

Copie anonyme - n°anonymat : 152292

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : | Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On a donc $I_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq [\ln x]_1^{n+1} \leq I_n$.

donc ~~$-1 + \frac{1}{n+1} - [\ln x]_1^{n+1} \leq$~~

$[\ln x]_1^{n+1} \leq I_n$

donc $\ln(n+1) \leq I_n$

Or $\ln(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $\boxed{I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$

Partie B

5) @ $\varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t}$.

$\varphi'_x(t) = \frac{-(1-t) - (x-t) \times (-1)}{(1-t)^2} = \frac{-1+t+x-t}{(1-t)^2} = \frac{x-1}{(1-t)^2}$ Or $x-1 < 0$ $\forall x \in [0,1[$.

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'_x(t)$		$-$	‖	$-$	
$\varphi_x(t)$	$+\infty$	↘	‖	↘	$-\infty$

$\frac{1}{1-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ $\frac{x-t}{1-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$

car $\frac{x-t}{1-t} \ll x-t$ qd $t \to \pm\infty$

$\frac{1}{1-t} \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$ $\frac{x-t}{1-t} \xrightarrow[t \to -\infty]{} +\infty$

9/20

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(b) On veut $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$.

~~Soit $f(x) = \frac{x-t}{1-t}$ $f'(x) = 1$ donc f croît~~
~~Or $f(0) = \frac{-t}{1-t}$~~

~~Regardons~~

(c) $\frac{\varphi_x(t)}{1-t} = \frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{a}{1-t}$

$\frac{\varphi_x(t)}{1-t} = \frac{x-t}{(1-t)^2}$

On décompose la fraction en éléments simples, on a donc :

$\frac{\varphi_x(t)}{1-t} = \frac{\alpha x + \beta}{(1-t)^2} + \frac{a}{1-t}$

d'après l'énoncé, on a $\alpha = 1$ et $\beta = -1$.

donc $\frac{x-t}{(1-t)^2} = \frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{a}{1-t}$.

En multipliant par $(1-t)$, on a : $\frac{(x-t)}{1-t} = \frac{x-1}{1-t} + a$.

X

6) $h(x) = -\ln(1-x)$.

(a) $h'(x) = \frac{1}{1-x} > 0$ pour $x \in [0,1[$

	0		1
$h'(x)$		+	
$h(x)$	0	↗	$+\infty$

$h(0) = \ln(1) = 0$

~~$h(x)$~~ et $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$

donc $h(x) \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$

ⓒ $R_n(x) \geq 0$ ~~...~~ $\forall x \in [0,1[$

car c'est une intégrale continue et que la fonction $\frac{(\varphi_x(t))^n}{1-t}$ est positive par le 5b.

Donc $R_n(x) \geq 0$.

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + R_n(x) \quad \text{donc} \quad R_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - h(x).$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \ln(1-x).$$

ⓓ

On regarde par d'Alembert $\frac{(x+1)^k/k}{x^k/k} = \underbrace{\left(\frac{x+1}{x}\right)^k}_{\to 1 \text{ qd } x \to +\infty} \cdot 1 \to 1$ donc

$\sum \frac{x^k}{k}$ converge par d'Alembert.

EXERCICE 3 :

1) h est croissante et bornée
- si elle est majorée, elle admet une limite finie qui correspond à sa borne supérieure
- si elle est minorée et pas majorée, elle tend vers $+\infty$ donc n'admet pas de limite finie.

2) $h(X)$ et $h(Y)$ admettent des espérances car on a h croissante et majorée donc h converge.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} h(n)-h(n-1)$ est une série convergente, car on a toujours
$\sum u_{k+1}-u_k$ de même convergence que (u_k).
Or la suite $h(n)$ converge par les questions précédentes.
↳ ce qui se vérifie par télescopage

on a : $\sum_{n=1}^{N} h(n)-h(n-1) = h(1)-h(0)$
$+ h(2)-h(1)$
$+ \dots$
$+ h(N)-h(N-1)$
$= h(N)-h(0) \sim h(N)$. qd $N \to +\infty$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (h(n)-h(n-1)) \underbrace{P(X \geq n)}_{\leq 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (h(n)-h(n-1))$ qui converge

par def de la somme des probabilités

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} (h(n)-h(n-1)) P(X \geq n)$ converge.

5) $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge $\Rightarrow u_k \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

donc par 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (h(n)-h(n-1)) P(X \geq n)$ cv $\Rightarrow (h(n)-h(n-1)) P(X \geq n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

Or $(h(n)-h(n-1)) \underset{n \to +\infty}{\to} l-l' \neq 0$ par ①

donc $P(X \geq N+1) \underset{N \to +\infty}{\to} 0$ avec $n = N+1$.

12/20

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 152292

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : | Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6) Par le théorème de transfert,
$E(h(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) P(X=n)$.

Or $(h(n)-h(n-1)) P(X \geq n) = h(n) P(X \geq n) - h(n-1) P(X \geq n)$.
$= h(n) P(X=n)$.
Donc on a $E(h(X)) = h(0) P(X=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (h(n)-h(n-1)) P(X \geq n)$ X.

7) si $P(X \geq t) \leq P(Y \geq t)$. $\forall t \in \mathbb{R}$.
$E(h(X)) = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (h(n)-h(n-1)) P(X \geq n) \leq h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (h(n)-h(n-1)) P(Y \leq n)$
$= E(h(Y))$
Cette inégalité se conserve avec la somme car $P(X \geq t) \leq P(Y \geq t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
Donc $E(h(X)) \leq E(h(Y))$.

Partie 2 :
1) $h_n(i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i<n \\ 1 \text{ si } i \geq n \end{cases}$

h_n est croissante de façon évidente, puisqu'on a une fonction constante avec des valeurs nulles si $i<n$ et égales à 1 si $i \geq n$.
h_n est bornée, car elle est majorée par 1 et minorée par 0 (doublement).

2) On a $E(h(X)) \leq E(h(Y))$ par conséquent
~~donc $E(h(X)) \leq$~~
Or $E(h(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(i) P(X \geq n)$
car pour $i<n$, on a $h_n(i)=0$.

De même, $E(h(Y)) = \sum_{i=0}^{\infty} h_n(i) P(Y=i)$ par th. de transfert.

$= \sum_{i=0}^{\infty} h_n(i) P(Y \geqslant n)$.

Donc on a $\sum_{i=0}^{\infty} h_n(i) P(X \geqslant n) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} h_n(i) P(Y \geqslant n)$

donc $P(X \geqslant n) \leqslant P(Y \geqslant n)$

3)

4) X est stochastiquement inférieure à $Y \Leftrightarrow E(h(X)) \leqslant E(h(Y))$

Partie III.

1) $P(X \leqslant Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k \mid Y \geqslant k] P(Y \geqslant k)$ par les probabilités totales.

$= \sum_{K=0}^{+\infty} P(X=k) P(Y \geqslant k)$ par indépendance de X et Y.

2) Z est de même loi que X donc $P(X \geqslant t) \leqslant P(Y \geqslant t) \Rightarrow P(Z \geqslant t) \leqslant P(Y \geqslant t)$

Donc par ① $P(X \leqslant Y) = \sum_{K=0}^{+\infty} P(X=k) P(Y \geqslant k)$.

donc $P(X \leqslant Y) \geqslant \sum_{K=0}^{+\infty} P(X=k) P(Z \geqslant k)$.

3) $P(X \leqslant Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k \mid Z \geqslant k) P(Z \geqslant k)$ par les probas totales

$= \sum_{K=0}^{+\infty} P(X=k)\,P(Z \geq k)$ par indépendance de X et Z

4) On a par définition d'une probabilité, $P(Z=X) \geq 0$
montrons que $P(Z=X) \neq 0$.

X.

5)

6) $P(Z \geq X) \geq \frac{1}{\alpha}$ par (5)

donc $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\,P(Z \geq k) > \frac{1}{\alpha}$

~~dor~~ OR $\sum_{K=0}^{+\infty} P(X=k)\,P(Z \geq k) \leq P(X \leq Y)$ par (2).

Donc $P(X \leq Y) > 1/2$

EXERCICE 4

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ & 0 & & \lambda_{n-1} & \\ & & \ddots & & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & 0 & \end{pmatrix}$$

1)

2) $n=2$ $A(\lambda)\begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) $A(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit λ vp de $A(1,1)$

$A - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ non inversible

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

d'ailleurs $\mathrm{tr} A(1,1) = 0 = 1 - 1$.

Donc $\mathrm{sp} A(1,1) = \{1, -1\}$.

(b) $A(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit λ valeur propre (vp) de $A(1,-1)$

$A - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ non inversible

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = -1$

donc $\lambda = i$ (mais pas une valeur propre réelle).

On cherche λ tq $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$.

$\begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = \lambda x \\ x = -\lambda^2 x \end{cases}$ Or pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cela impose $\lambda = 0$. (mais impossible...) et questions suivantes.

(c) toutes les matrices de $\mathcal{E}_2$ sont inversibles, car elles sont de rang = 2 puisque leurs 2 colonnes sont libres du fait de leurs zéros étagés.

(d)

(e) $A(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit λ valeur propre de $A(\lambda_1, \lambda_2)$

$A(\lambda_1, \lambda_2) - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda \end{pmatrix}$ non inversible

16/20

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 152292

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : | Session : 2024

Épreuve de : Littéraire

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda_1\lambda_2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = \lambda_1\lambda_2$.

si $\lambda_1\lambda_2 \geqslant 0$, alors $\lambda = \pm\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ et $A(\lambda_1\lambda_2)$ a deux valeurs propres réelles distinctes

si $\lambda_1\lambda_2 < 0$, alors $A(\lambda_1\lambda_2)$ ne possède aucune valeur propre réelle.

(f) $A(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $sp A(0,\lambda) = \{0,0\}$. car la matrice est triangulaire
Donc $A(0,\lambda)$ diagonalisable ssi semblable à $0I_2$.
donc $\lambda = 0$ est une CNS pour que A soit diagonalisable.

(g) $X \hookrightarrow geo(p)$ donc $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
$Y \hookrightarrow geo(p)$ et $P(X=n) = (1-p)^{n-1}p = P(Y=n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$P(A(w)$ diagonalisable$)$?

3) $A(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) $Rg A(1,1,1) = 3$ donc la matrice est inversible
↳ car les 3 colonnes sont libres
↳ car une matrice représente un endomorphisme et que si f est un endomorphisme, on a
f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f inversible $\Leftrightarrow Rg f = n$.

17/20

© d'après (3c), 1 et 1 sont valeurs propres de $A(1,1,1)$
Or $\operatorname{tr} A(1,1,1) = 0+1+0 = 1$
donc 1 est valeur propre deux fois.
On a donc $\operatorname{sp} A(1,1,-1) = \{1, 1, -1\}$.

(b) On regarde $\forall X \neq 0$, $A(1,1,1)X = \lambda X \Leftrightarrow \begin{matrix} z = \lambda x \\ y = \lambda y \\ x = \lambda z \end{matrix}$

4) @

$$A(\lambda)A(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \lambda_n \\ & \lambda_{n-1} & \\ \lambda_1 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \mu_n \\ & \mu_{n-1} & \\ \mu_1 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_n\mu_1 & & \\ & \lambda_{n-1}\mu_2 & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_1\mu_n \end{pmatrix}$$

donc $A(\lambda)A(\mu) = \begin{pmatrix} \lambda_n\mu_1 & & \\ & \lambda_{n-1}\mu_2 & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_2\mu_{n-1} \\ & & & \lambda_1\mu_n \end{pmatrix}$.

(b) $A(\lambda)$ inversible $\Leftrightarrow$ $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, $\lambda_i \neq \lambda_j$

/

/

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751