Copie anonyme - n°anonymat : 449101

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 31	Session : 2024

E6-00043 449101 Maths B/L

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

A.

1. f est une densité de probabilité.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 5^{-x} > 0$

et $\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad 5^{x} \geq 0$

Donc $a \geq 0$

De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

ie $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} a\,5^{t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} a\,5^{-t}\,dt = 1$

ie $\displaystyle a\left(\int_{-\infty}^{0} \exp(t\ln(5))\,dt + \int_{0}^{+\infty} \exp(-t\ln(5))\,dt\right) = 1$

ie $\displaystyle a\left(\left[\frac{\exp(t\ln(5))}{\ln(5)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{\exp(-t\ln(5))}{-\ln(5)}\right]_{0}^{+\infty}\right) = 1$

i.e $a\left(\frac{1}{\ln(5)} - 0 + \frac{1}{\ln(5)} - 0\right) = 1$

car $\ln(5) > 0$ et $\exp(t\ln(5)) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$

ainsi, $2a = \ln(5)$

ie $\boxed{a = \frac{\ln(5)}{2}}$.

On a bien $a \geq 0$

et $x \longmapsto \begin{cases} \frac{\ln(5)}{2} 5^{-x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\ln(5)}{2} 5^{x} & \text{sinon} \end{cases}$

est bien continue sur $\mathbb{R}$ par produit ($5^x \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = 5^{-0}$)

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

si $x \leq 0$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\ln(5)}{2} 5^t \, dt$$

$$\cancel{= \left[t \ln \frac{5^t}{2} \right]_{-\infty}^{x}}$$

$$= \left[\frac{\exp(t\ln(5))}{2} \right]_{-\infty}^{x}$$

i.e $\boxed{F_X(x) = \dfrac{\exp(x\ln(5))}{2}}$

(pour les mêmes raisons qu'en 1.)

si ~~x~~ $x > 0$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(5)}{2} 5^{t} dt + \int_0^x \frac{\ln(5)}{2} 5^{-t} dt$$

$$= \left[\frac{\exp(t\ln(5))}{2}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{\exp(-t\ln(5))}{2}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2} + 0 - \frac{\exp(-x\ln(5))}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{F_X(x) = 1 - \frac{1}{2}\exp(-x\ln(5))}$$

3. Soit $A > 0$,

$$\int_{-A}^{A} t^2 f(t)\, dt = \int_{-A}^{0} t\frac{\ln(5)}{2} \exp(t\ln(5))\, dt + \int_0^A t\frac{\ln(5)}{2}\exp(-t\ln(5))\, dt$$

$$= \left[t\frac{\exp(t\ln(5))}{2}\right]_{-A}^{0} - \int_{-A}^{0} \frac{\exp(t\ln(5))}{2} dt + \left[-t\frac{\exp(-t\ln(5))}{2}\right]_0^A + \int_0^A \frac{\exp(-t\ln(5))}{2} dt$$

$$= 0 + \frac{A\exp(-A\ln(5))}{2} + \frac{\exp(-A\ln(5))}{2} - \frac{1}{2}$$

$$+ \quad 0 \quad + \frac{A \exp(-A \ln(3))}{2} + \frac{\exp(-A\ln(8))}{2} - \frac{1}{2}$$

Par croissances comparées et somme, on a :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} A f(t)\,dt = -1$$

Copie anonyme - n°anonymat : 449101

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 31	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

B.

1. g est une densité de probabilité.

donc $\forall x \in]0,1]$, $\frac{\lambda}{(2+x)^2} \geq 0$

Or, $(2+x)^2 > 0$ donc $\lambda \geq 0$

De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 1$

ie $\int_0^1 g(t)\,dt = 1$ (g s'annule ailleurs)

i.e $\int_0^1 \frac{\lambda}{(2+t)^2}\,dt = 1$

ie $\lambda \left[-\frac{1}{2+t}\right]_0^1 = 1$

ie $\lambda\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = 1$

ie $\boxed{\lambda = 6}$

On a alors bien $x \longmapsto \begin{cases} \frac{6}{(2+x)^2} & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

continue sauf en un nombre fini de points (0 et 1).

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$$

si $x \leq 0$,

$$\boxed{F_Z(x) = 0}$$

si $x \in]0; 1]$,

$$F_Z(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{6}{(2+t)^2}\,dt$$

$$= \left[-\frac{6}{2+t} \right]_0^x$$

$$\boxed{F_Z(x) = -\frac{6}{2+x} + 3}$$

si $x > 1$,

$$\boxed{F_Z(x) = F_Z(1) = 1}$$

3. Soit $x \in]0;1]$,

On pose $g : x \longmapsto x + \frac{1}{x}$

g est dérivable et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \leq 0$
(donc continue)

g est strictement décroissante (g' ne s'annule qu'en 1)

et $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty \\ g(1) = 2 \end{cases}$

Ainsi, sur $]0;1]$, g prend des valeurs $[2;+\infty[$.

Ainsi, $\boxed{Y(\Omega) = [2;+\infty[.}$

4. Soit $x \in [2;+\infty[$,

$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}\left(Z + \frac{1}{Z} \leq x\right)$

$= \mathbb{P}(Z^2 - Zx + 1 \leq 0)$ $(Z > 0)$.

D'après 3., g est une bijection de $]0;1]$ vers $[2;+\infty[$. Elle admet donc une fonction inverse.

Or, $\forall x \in]0,1]$, $\frac{x^2}{x^2+1} g(x) = x$

Ainsi, $\mathbb{P}\left(Z + \frac{1}{Z} \leq x\right)$

$= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x^2}{x^2+1}\right)$

Ainsi, $F_Y(x) = -\dfrac{6}{2+\frac{x^2}{1+x^2}} + 3$

$$\boxed{F_Y(x) = -\frac{6(1+x^2)}{\cancel{2(1+x^2)}\,2+3x^2} + 3}$$

si $x < 2$, $\boxed{F_Y(x) = 0}$

5. $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{-6(1+x^2)}{2+3x^2} + 3 & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

est bien continue $\overset{\text{sur } \mathbb{R}}{\text{est}}$ dérivable sauf éventuellement en 2.

Ainsi, $\boxed{Y \text{ est bien à densité.}}$

~~Alors donc~~ $\boxed{f_Y : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{-6(2x)(2+3x^2)+6(1+x^2)(6x)}{(2+3x^2)^2} & \text{sinon} \end{cases}}$

est bien une densité de Y.

Copie anonyme - n°anonymat : 449101

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 31	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 2.

A.

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)} \qquad (\cos(2x) = \cos(x+x))$$

$$\boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)} \qquad (\sin(2x) = \sin(x+x))$$

b) $u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x)\cos(x)\,dx$

$$= \left[x \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{\sin(\pi)}{2} - \left[\frac{\cos(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 0 - \frac{\cos(\pi)}{4} + \frac{\cos(0)}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

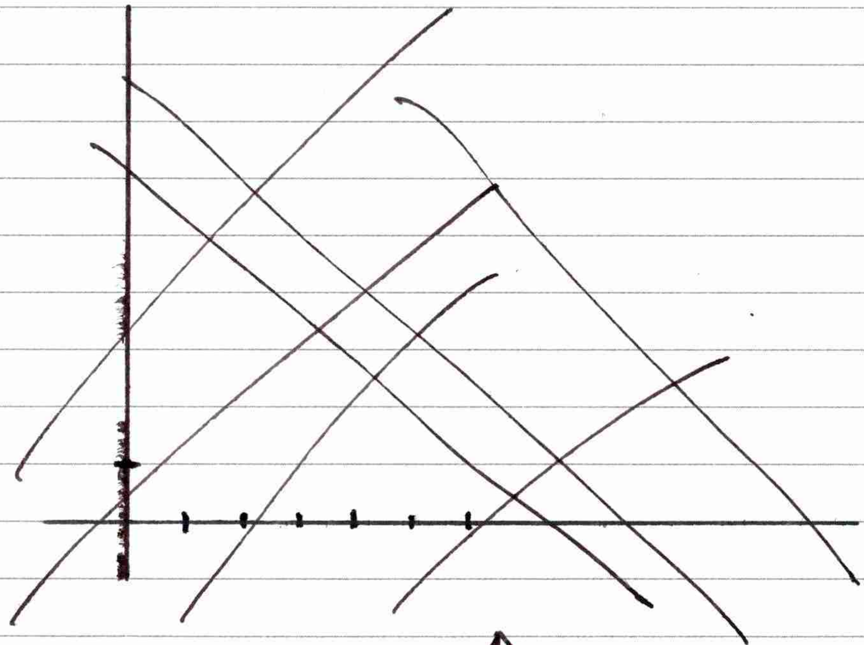
$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2}}$$

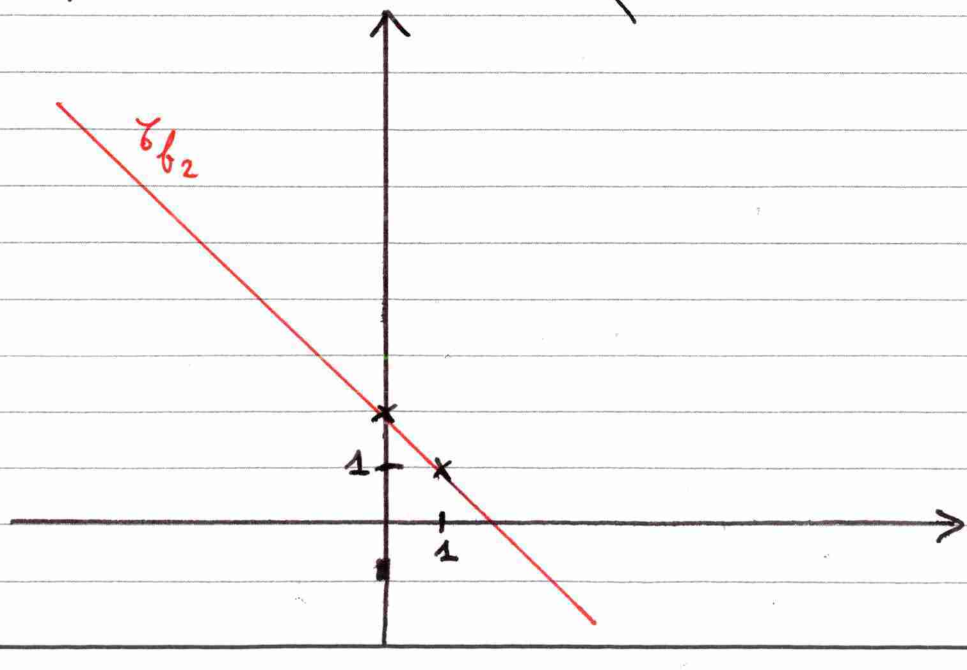
2. a)

$$f_2(t) = \begin{cases} \dfrac{1-1+2t-t^2}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2-t & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

f_2 a pour graphe :

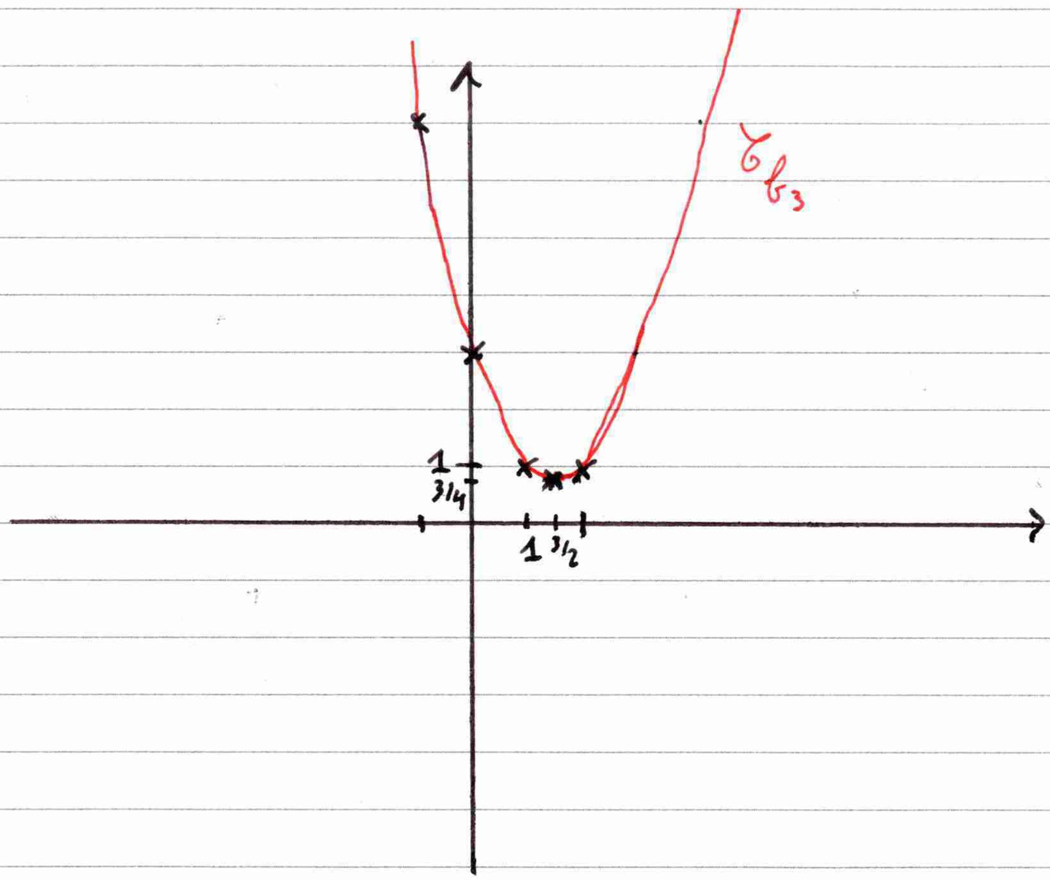




b)
$$f_3 = \begin{cases} \dfrac{1-1+3t-3t^2+t^3}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 3 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3-3t+t^2 & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 3 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

f_3 a pour graphe :



$$f_3\left(\tfrac{3}{2}\right) = 3 - \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{12-9}{4} = \frac{3}{4}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

f_n est continue sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, en 0, $1-(1-t)^n = nt + o(t)$

Ainsi, $\dfrac{1-(1-t)^n}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} n$.

$f_n(t)$ est donc continue en 0 également.

Donc $\boxed{f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,

Soit $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\cancel{f_n'(t) = \frac{n(1-t)^{n-1} - (1-(1-t)^n)}{t^2}}$$

$$\cancel{= \frac{(1-t)^{n-1}(n+(1-t))-1}{t^2}}$$

~~Or, Si $n \geq 2$,~~

$$\cancel{(1-t)^{n-1} \xrightarrow[t\to 0]{} n-1}$$

~~Par~~

$$\frac{f_n(h) - f_n(0)}{h} = \frac{1-(1-h)^n - n}{h}$$

$$= \frac{1-(1-h)^n}{h} - \frac{n}{h}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1-(1-h)^n}{h} = n$ (d'après c))

Par somme, on a donc $\frac{f_n(h) - f_n(0)}{h}$ n'admet pas de limite finie en 0.

Donc $\boxed{f_n \text{ n'est pas dérivable en } 0}$

e) ~~On raisonne par récurrence.~~
~~Notons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n « $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1}$ »~~

Copie anonyme - n°anonymat : 449101

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 31 | Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Montrons que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $f_1(t) = 2 - t$

$(-1)^2 \binom{1}{1} t^0$

$f_1(t) = 1 \quad \left(\frac{1-(1-1)^n}{1} = 1 \right)$

$(-1)^2 \binom{1}{1} t^0 = 1$

P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose P_n. Montrons P_{n+1}.

f_{n+1} Soit $t \in \mathbb{R}^*$,

$f_{n+1}(t) = \frac{1-(1-t)^{n+1}}{t} = f_n(t) + \frac{(1-t)^n - (1-t)^{n+1}}{t}$

(par hypothèse de récurrence) $= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1} + \frac{(1-t)^n(1-1+t)}{t}$

$= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \binom{n+1}{}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Soit $t \in \mathbb{R}^*$,

$$f_n(t) = \cancel{\sum_{k=1}^{n}} \frac{1-(1-t)^n}{t}$$

Or, si $t \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1} = -\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{n} (-t)^k \binom{n}{k}$$

$$= -\frac{1}{t}\left((1-t)^n - (-t)^0 \binom{n}{0} \right)$$

$$= \frac{1-(1-t)^n}{t} = f_n(t).$$

si $t = 1$, $f_n(t) = 1$

et $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = (-1)\left(0^n - 1\right)$

$= 1 \qquad (n \neq 0).$

Soit $t = 0$, $f_n(t) = n$

et $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 0^{k-1}$

$= (-1)^2 \binom{n}{1} = n$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

3 - a) $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1}\,dt \quad \text{(d'après 2.a)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \int_0^1 t^{k-1}\,dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{0^k}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k}$$

Ainsi, $\boxed{I_1 = \frac{(-1)^2}{1} = 1}$

$$I_2 = \frac{(-1)^2}{1}\binom{2}{1} + \frac{(-1)^3}{2}\binom{2}{2}$$

$$= 2 - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{3}{2}}$$

$$I_3 = \frac{(-1)^2}{1}\binom{3}{1} + \frac{(-1)^3}{2}\binom{3}{2} + \frac{(-1)^4}{3}\binom{3}{3}$$

$$= \cancel{3 \times 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}} = 3 - \frac{3\times 2}{2\times 2} + \frac{1}{3}$$

$$= \cancel{\frac{36 - 9 + 2}{6}} = \frac{36 - 18 + 4}{12}$$

$$\cancel{\boxed{I_3 = \frac{29}{6}}} \qquad \boxed{I_3 = \frac{11}{6}}$$

b). En reprenant la formule montrée en 3-a) et avec $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}}$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,dt = \left[-\frac{(1-t)^k}{k} \right]_0^1$$

$$= \frac{1^k}{k} - \frac{0^k}{k}$$

$$\boxed{\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,dt = \frac{1}{k} \quad (\text{car } k \neq 0)}.$$

d) $$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t}\,dt - \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{t}\,dt$$

$$= [\ln(t)]_0^1 -$$

Copie anonyme - n°anonymat : 449101

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 32	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

e)

4. a) ~~Soit~~ Soit $p \in \mathbb{N}^*$,
~~On trouve~~

$$\int_0^{\pi/2} x \sin(2px)\, dx = \left[x \frac{-\cos(2px)}{2p} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2px)}{2p}\, dx$$

$$= 0 - \frac{\pi}{2}\frac{\cos(p\pi)}{2p} + \left[\frac{\sin(2px)}{4p^2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{\pi}{4p}\cos(p\pi) + \frac{\sin(p\pi)}{4p^2} - 0$$

ie $\int_0^{\pi/2} x \sin(2px)\,dx = \frac{\pi}{4p}\left(\frac{\sin(p\pi)}{p\pi} - \cos(p\pi)\right)$

$$= \frac{\pi}{4p}\left(0 - \cos(p\pi)\right)$$

si p pair, $\cos(p\pi) = 1 = (-1)^{p}$

si p impair, $\cos(p\pi) = -1 = (-1)^{p}$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} x \sin(2px)\,dx = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(2px) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\, 2\sin(px)\cos(px)$$

c)

B.

5. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

φ_x ~~t t~~ est dérivable en t comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$)

$$\varphi_x'(t) = \frac{-(1-t) + (x-t)}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{x - \cancel{t} + \cancel{t} - 1}{(1-t)^2} < 0$$

~~On a le tableau de variation~~

De plus, $\varphi_x(t) = \dfrac{t\left(\frac{x}{t} - 1\right)}{t\left(\frac{1}{t} - 1\right)} = \dfrac{\left(\frac{x}{t} - 1\right)}{\frac{1}{t} - 1}$

Ainsi, $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_x(t) = 1$ (par quotient)

et $\lim\limits_{t \to -\infty} \varphi_x(t) = 1$

De plus, $\lim\limits_{t \to 1^+} (x - t) = x - 1 < 0$

et $\lim\limits_{t \to 1^+} 1 - t = 0^-$

donc $\lim\limits_{t \to 1^+} \varphi_x(t) = +\infty$

et $\lim\limits_{t \to 1^-} (x - t) = x - 1 < 0$ et $\lim\limits_{t \to 1^-} 1 - t = 0^+$

donc $\lim\limits_{t \to 1^-} \varphi_x(t) = -\infty$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
φ_x'		$-$	‖	$-$	
φ_x	$1 \searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty \searrow$	1

b) Soit $x \in [0;1[$, $t \in [0,x]$

$$\varphi_x(x) = 0$$

Or, $t \leq x$

par décroissance de φ_x sur $[0;1[$, on a :

$$\boxed{\varphi_x(t) \geq 0}$$

De plus, $\varphi_x(t) - x = \dfrac{\cancel{x} - t - \cancel{x} + tx}{1-t}$

$$= \frac{t(x-1)}{1-t}$$

Or, $x < 1$ donc $x - 1 < 0$
et $t > 0$ et $t \leq x < 1$ ie $1 - t > 0$

Ainsi, par produit, $\varphi_x(t) - x \leq 0$

Donc $\boxed{\varphi_x(t) \leq x}$

c)

Copie anonyme - n°anonymat : 449101

Code épreuve : 284	Nombre de pages :
Session : 2024	Épreuve de : Mathématiques

Emplacement QR Code

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

6. a) h est dérivable sur $[0;1[$ comme composition de fonctions qui le sont $(1-x \neq 0)$.

Soit $x \in [0;1[$,

$$h'(x) = \frac{1}{1-x} > 0.$$

De plus, $\lim\limits_{x \to 1} -\ln(1-x) = +\infty$ par composition

et $-\ln(1) = 0$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		1
h'		$+$	‖
h	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) ~~D'après la formule de Taylor-Young, on a :~~

$$\cancel{h(x) = \sum_{k=1}^{n} (x-0)^k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in [0; 1[$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n}{1-t}\, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} +$$

c)

d) Soit $x \in [0, 1[$, $k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq R_k(x) \leq -x^k \ln(1-x)$$

donc $x^k \ln(1-x) \leq 0$ Et

Exercice 3 :

I.

1. La fonction h est croissante et bornée.

D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite finie en $+\infty$.

~~Elle admet~~

2. $0 \leq \sum_{k \in X(\Omega)} h(k) \mathbb{P}(X=k) \leq \sum_{k \in X(\Omega)} h(k)$

$\leq$

3. Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} h(n) - h(n-1) = h(N) - h(0)$$

Or, h admet une limite finie en $+\infty$ et $h(0) \in \mathbb{R}$ donc ~~la~~ $h(N) - h(0)$ converge quand N tend vers $+\infty$

Copie anonyme - n°anonymat : 449101

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 31	Session : 2024
Épreuve de : Mathématiques		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

La série de terme général $(h(n) - h(n-1))$ converge donc.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Par croissance de h, $h(n) - h(n-1) \geqslant 0$.

Ainsi, $(h(n) - h(n-1))\,\mathbb{P}(X \geqslant n) \geq 0$.

Or, $\forall n$ $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leq 1$.

ie $(h(n) - h(n-1))\,\mathbb{P}(X \geqslant n) \leq h(n) - h(n-1)$

Or, la série de terme général $(h(n) - h(n-1))$ est convergente.

Ainsi, d'après le théorème de comparaison,

la série de terme général $(h(n) - h(n-1))\,\mathbb{P}(X \geqslant n)$ converge.

5. Raisonnons par l'absurde,

supposons que $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}(X \geqslant N+1) > 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On, ~~Soit~~ $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X \geq N+1) = 1 - \mathbb{P}(X < N+1)$$

Or, ~~car $\mathbb{P}(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \{X <$~~

par croissance et majoration par 1 de ~~la proba~~ la fonction $x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x+1)$,

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(X < N+1) = 1.$$

Donc $\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(X \geq N+1) = 0$ Absurde !

Donc $\boxed{\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(X \geq N+1) = 0}$

6.

7. On raisonne de même qu'en 6. ~~pour~~ Y et on obtient

$$\mathbb{E}(h(Y)) = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1)) \mathbb{P}(X \geq n)$$

Ainsi, $\mathbb{E}(h(Y)) - \mathbb{E}(h(X)) = \sum_{n=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1))(\mathbb{P}(\cancel{X} \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n))$

Or, $h(n) - h(n-1) \geq 0$ et $\mathbb{P}(Y \geq n) \geq \mathbb{P}(X \geq n)$ (par hypothèse) donc on a :

$$\mathbb{E}(h(Y)) - \mathbb{E}(h(X)) \geq 0$$

ie $\boxed{\mathbb{E}(h(Y)) \geq \mathbb{E}(h(X))}$

II.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$,

Soit $i,j \in \mathbb{N}$, tq $i < j$

si $i \geq n$, $h_n(i) = h_n(j) = 1$

si $i < n$ et $j \geq n$, $h_n(i) = 0 \leq h_n(j) = 1$

si $j < n$, $h_n(i) = h_n(j) = 0$.

Ainsi, dans tous les cas $h_n(i) \leq h_n(j)$

et $0 \leq h_n(j) \leq 1$.

Ainsi, $\boxed{h_n \text{ est croissante et bornée.}}$

2.

3. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \geq n) \leq \mathbb{P}(X \geq n)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$,

X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$ donc :

$$\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}(X \geq \lfloor t \rfloor)$$

et $$\mathbb{P}(Y \geq t) = \mathbb{P}(Y \geq \lfloor t \rfloor)$$

Or, $\lfloor t \rfloor \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(Y \geq t) = \mathbb{P}(Y \geq \lfloor t \rfloor) \geq \mathbb{P}(X \geq \lfloor t \rfloor) = \mathbb{P}(X \geq t)}$$

Ainsi, $\boxed{X \text{ est stochastiquement inférieure à } Y}$

4.

III -

1. $\cancel{\mathbb{P}(X \leq Y)}$

$$[X \leq Y] = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left([X = k] \cap [Y \geq k] \right).$$

Par incompatibilité des $\left([X = k] \cap [Y \geq k] \right)_{k \geq 0}$, on a :

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = k] \cap [Y \geq k] \right)$$

Par indépendance de X et Y, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \leq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\, \mathbb{P}(Y \geq k)}$$

2. $X \leq_{st} Y$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \geq k) \leq \mathbb{P}(Y \geq k)$

Or, $\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(Z \geq k)$ (X et Z ont même loi)

Copie anonyme - n°anonymat : 449101

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 31	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc $\mathbb{P}(Z \geq k) \leq \mathbb{P}(Y \leq k)$

En sommant sur $\mathbb{N}$ et en passant à la limite on a bien le résultat :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \leq Y) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Z \geq k)}$$

3. X et Z ont même loi.
~~Elles sont donc~~ On a donc X stochastiquement inférieure à Z.

En appliquant 2. avec $Y = Z$, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(Z \geq X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Z \geq k)}$$

4. $\mathbb{P}(Z = X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=k)\,\mathbb{P}(X=k)$

(par incompatibilité et indépendance).

donc $\mathbb{P}(Z = X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)^2$

Or, $\exists k \in \mathbb{N}$ tq $\mathbb{P}(X=k) \neq 0$ (sinon $\mathbb{P}$ n'est pas une probabilité car $(X=k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $\boxed{P(Z=X) > 0}$

Exercice 4 :

1. ~~On Soient $A(\lambda), A(\mu) \in \mathcal{E}_n, \lambda \in \mathbb{R}$~~

. $\mathcal{E}_n$ n'est pas vide (~~Car~~ $A(0, \dots, 0) \in \mathcal{E}_n$)

Soient $A(\lambda), A(\mu) \in \mathcal{E}_n$, $a \in \mathbb{R}$

$A(\lambda + a\mu)$ est aussi une matrice de la forme recquise, les coefficients non nuls sont les $\lambda_i + a\mu_i$.

$\mathcal{E}_n$ a pour base la famille

$$(E_{n,1}, E_{n-1,2}, \dots, E_{1,n})$$

où $E_{i,j}$ est la matrice avec pour seul coefficient non-nul le coefficient de la i-ème ligne j-ème colonne.

2. a) $A(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit λ tq $A(1,1) - \lambda I_2 \notin \mathcal{GL}_2$

$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \notin \mathcal{GL}_2$

ie $\lambda^2 - 1 = 0$

ie $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$

$\boxed{Sp\ (A(1,1)) = \{-1, 1\}}$

b) $A(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit λ tq $A(1,-1) - \lambda I_2 \notin \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \notin \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$

ie $\lambda^2 + 1 = 0$

$\boxed{Sp\ (A(1,-1)) = \emptyset}$

d) Non puisque $A(1,-1)$ ne l'est pas (aucune valeur propre)

c) Oui, elles ont.