Copie anonyme - n°anonymat : 619451

P2-00057
619451
Maths B/L

Code épreuve : 284

Nombre de pages : 25

Session : 2024

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

Partie A :

1] f est une densité de probabilité.

Ainsi, on se doit d'avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

on calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} a5^{t}dt + \int_{0}^{+\infty} a5^{-t}dt$

$= a\int_{-\infty}^{0} e^{t\ln(5)}dt + a\int_{0}^{+\infty} e^{-t\ln(5)}dt$

$= a\left[\frac{e^{t\ln(5)}}{\ln(5)}\right]_{-\infty}^{0} + a\left[-\frac{e^{-t\ln(5)}}{\ln(5)}\right]_{0}^{+\infty}$

or $e^{t\ln(5)} \xrightarrow[-\infty]{} 0$ et $-e^{-t\ln(5)} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \cancel{\frac{5a}{\ln(5)}}\ \frac{a}{\ln(5)} + \frac{a}{\ln(5)}$

$= \frac{2a}{\ln(5)}$

$\frac{2a}{\ln(5)} = 1$ ssi $\boxed{a = \frac{\ln(5)}{2}}$.

2] Soit F_X la fonction de répartition de X.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

si $x \leq 0$ $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\ln(5)}{2} e^{t\ln(5)}\,dt$

$= \frac{\ln(5)}{2} \left[\frac{e^{t\ln(5)}}{\ln(5)} \right]_{-\infty}^{x}$

or $e^{t\ln(5)} \xrightarrow[-\infty]{} 0$

donc si $x \leq 0$ $\quad F_X(x) = \frac{e^{x\ln(5)}}{2} = \frac{5^x}{2}$

si $x > 0$ $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} \frac{\ln(5)}{2} e^{-t\ln(5)}\,dt$

$= \frac{1}{2} + \frac{\ln(5)}{2} \left[-\frac{e^{-t\ln(5)}}{\ln(5)} \right]_{0}^{x}$

$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-x\ln(5)}}{2} + \frac{1}{2}$

$= 1 - \frac{5^{-x}}{2}$

ainsi $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} \frac{5^x}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{5^{-x}}{2} & \text{sinon} \end{cases}}$

3) sous réserve d'existence $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(5)}{2} t^2 e^{t\ln(5)}\,dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(5)}{2} t^2 e^{-t\ln(5)}\,dt$

or si on fait $t^2 \times t^2 f(t)$, alors $t^2 . t^2 f(t) \xrightarrow[-\infty]{} 0$

et $t^2 . t^2 f(t) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

ainsi $t^2 f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t^2 f(t) \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

ainsi d'après Riemann $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$ converge et $E(X^2)$ existe

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{0} \frac{h(s)}{2} t^2 e^{th(s)} dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{h(s)}{2} t^2 e^{-th(s)} dt$$

On fait une Intégration par partie sur $\int_{-\infty}^{0} \frac{h(s)}{2} t^2 e^{th(s)} dt$

$u(t) = t^2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_-)$ $\qquad v(t) = \frac{e^{th(s)}}{h(s)} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_-)$

$u'(t) = 2t$ $\qquad v'(t) = e^{th(s)}$

donc $\int_{Y}^{0} \frac{h(s)}{2} t^2 e^{th(s)} dt = \left[\frac{t^2 e^{th(s)}}{2}\right]_Y^0 - \int_Y^0 t e^{th(s)} dt$

$= 0 - \frac{Y^2 e^{Yh(s)}}{2} - \int_Y^0 t e^{th(s)} dt \xrightarrow[-\infty]{} - \int_{-\infty}^0 t e^{th(s)} dt$

On refait une Intégration par partie sur $- \int_{-\infty}^0 t e^{th(s)} dt$

$u(t) = t \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_-)$ $\qquad v(t) = \frac{e^{th(s)}}{h(s)}$

$u'(t) = 1$ $\qquad v'(t) = e^{th(s)}$

$$- \int_{Y}^0 t e^{th(s)} dt = -\left[\frac{t e^{th(s)}}{h(s)}\right]_Y^0 + \int_Y^0 \frac{e^{th(s)}}{h(s)}$$

$$\xrightarrow[Y \to -\infty]{} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{th(s)}}{h(s)} dt = \left[\frac{e^{th(s)}}{h(s)^2}\right]_{-\infty}^0$$

$$= \frac{1}{h(s)^2}$$

donc $\int_{-\infty}^0 \frac{h(s)}{2} t^2 e^{th(s)} dt = \frac{1}{h(s)^2}$

on fait une intégration par partie sur $\int_0^{+\infty} \frac{h(s)}{2} t^2 e^{-th(s)} dt$

$u(t) = t^2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ $\qquad$ $v(t) = -\dfrac{e^{-t\ln(5)}}{\ln(5)} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$

$u'(t) = 2t$ $\qquad$ $v'(t) = e^{-t\ln(5)}$

donc $\displaystyle\int_0^Y \frac{\ln(5)}{2} t^2 e^{-t\ln(5)}\,dt = \left[-\frac{t^2 e^{-t\ln(5)}}{2}\right]_0^Y + \int_0^Y t e^{-t\ln(5)}\,dt$

$$\xrightarrow[Y\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} t e^{-t\ln(5)}\,dt$$

on refait une intégration par partie :

$u(t) = t \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ $\qquad$ $v(t) = -\dfrac{e^{-t\ln(5)}}{\ln(5)} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$

$u'(t) = 1$ $\qquad$ $v'(t) = e^{-t\ln(5)}$

donc $\displaystyle\int_0^Y t e^{-t\ln(5)}\,dt = \left[-\frac{t e^{-t\ln(5)}}{\ln(5)}\right]_0^Y + \int_0^Y \frac{e^{-t\ln(5)}}{\ln(5)}\,dt$

$$\xrightarrow[Y\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\ln(5)}}{\ln(5)}\,dt = \left[-\frac{e^{-t\ln(5)}}{\ln(5)^2}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\ln(5)^2}$$

donc $E(X^2) = \dfrac{1}{\ln(5)^2} + \dfrac{1}{\ln(5)^2}$

$$\boxed{= \frac{2}{\ln(5)^2}}$$

Partie B

1] g est une densité

ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 0 + \int_0^1 \frac{\lambda}{(2+t)^2}\,dt + 0 = 1$

or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\lambda}{(2+t)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{\lambda}{(2+t)(2+t)}\,dt$

~~déterminons~~ $\cancel{(a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \dfrac{\lambda}{(2+t)^2} = \dfrac{a}{2+t} + \dfrac{b}{2+t}}$

$\cancel{\dfrac{\lambda}{(2+t)^2} = \dfrac{a}{2+t} + \dfrac{b}{2+t}}$

$\cancel{\Rightarrow \dfrac{\lambda}{(2+t)^2} = \dfrac{2a + at + 2b + bt}{(2+t)^2}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 619451

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 25	Session : 2024

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Emplacement QR Code

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$\Rightarrow \cancel{\frac{\lambda}{(2+t)^2}}$

On fait un changement de variable,
on pose $u = 2+t$ (bijectif) et $du = dt$

$\frac{\lambda}{(2+t)^2}\, dt = \frac{\lambda}{u^2}\, du$

$0 \leftarrow 2$

$1 \leftarrow 3$

donc $\int_0^1 \frac{\lambda}{(2+t)^2}\, dt = \int_2^3 \frac{\lambda}{u^2}\, du$

$= \lambda \int_2^3 u^{-2}\, du$

$= \lambda \left[-u^{-1} \right]_2^3$

$= \lambda \left[-\frac{1}{u} \right]_2^3$

$= \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{3}$

$= \frac{3\lambda - 2\lambda}{6}$

$= \frac{\lambda}{6}$

$\int_0^1 \frac{\lambda}{(2+t)^2}\, dt = 1$ ssi $\boxed{\lambda = 6}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2] Soit F_Z la fonction de répartition de Z.

Si $x \leq 0$ $F_Z(x) = 0$
si $x > 1$ $F_Z(x) = 1$

si $x \in]0;1]$ $F_Z(x) = \int_0^x \frac{6}{(2+t)^2} dt$

on pose le même changement de variable qu'à la question précédente.

$$\int_0^x \frac{6}{(2+t)^2} dt = 6\int_2^{2+x} \frac{1}{u^2} du = 6\left[-\frac{1}{u}\right]_2^{2+x}$$
$$= 3 - \frac{6}{2+x}$$

donc $\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 3 - \frac{6}{2+x} & \text{si } x \in]0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$

3] ~~$[Y \leq x]$ ssi $[Z + \frac{1}{Z} \leq x]$ ssi $[$~~

soit $h : x \longmapsto x + \frac{1}{x}$. On étudie cette fonction dans $]0;1]$

$h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ $h'(x) > 0$
ssi $1 > \frac{1}{x^2}$
ssi $x^2 > 1$
ssi $x > 1$ ou $x < -1$

ainsi $\forall x \in]0;1]$ h' est négative

x	0	1
$h(x)$	$+\infty \searrow$	2

$h(x) \xrightarrow[0]{} +\infty$

$h(x) \xrightarrow[1]{} 2$

ainsi h prend toutes les valeurs incluses dans $[2;+\infty[$.

ainsi si $Z(\Omega) =]0;1]$

$$\boxed{Y(\Omega) = [2;+\infty[}$$

Exercice 2 :

Partie A :

1.a) $\cos(2x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$

$$\boxed{= \cos^2(x) - \sin^2(x)}$$

$\sin(2x) = \cos(x)\sin(x) + \cos(x)\sin(x)$

$$\boxed{= 2\cos(x)\sin(x)}$$

b) $u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos(x)\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin(2x)}{2}\,dx$

on fait une intégration par partie :

$u(x) = x \in \mathcal{C}^1([0;\frac{\pi}{2}])$ $\qquad v(x) = -\frac{\cos(2x)}{2} \in \mathcal{C}^1([0;\frac{\pi}{2}])$

$u'(x) = 1$ $\qquad v'(x) = \sin(2x)$

ainsi $u_1 = \frac{1}{2}\left[-\frac{x\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{4}\,dx$

$= \frac{1}{2} \times \frac{-\frac{\pi}{2}\times(-1)}{2} + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\frac{\pi}{2}}{4} + \frac{1}{4}(0+0)$

$= \frac{\pi}{8}$

donc $\boxed{u_1 = \frac{\pi}{8}}$

2.a) $f_2(t) = \begin{cases} \dfrac{1-(1-t)^2}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

$\forall t \in \mathbb{R}^*$ $\quad f_2'(t) = \dfrac{2(1-t)t - (1-(1-t)^2)}{t^2}$

$= \dfrac{2t(1-t) - 1 + (1-t)^2}{t^2}$

$= \dfrac{(1-t)(2t+1-t) - 1}{t^2}$

$= \dfrac{(1-t)(1+t) - 1}{t^2}$

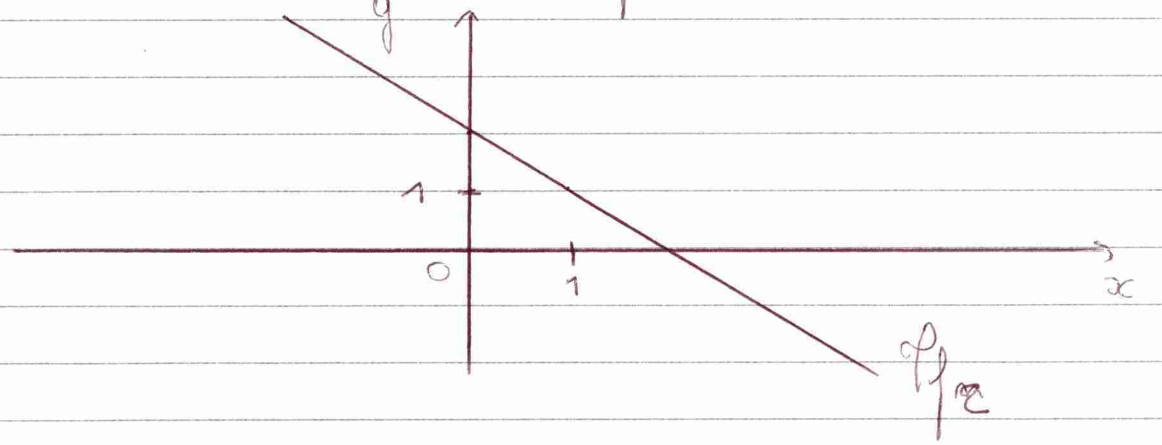
$= \dfrac{1-t^2-1}{t^2}$

$= -1$

donc f_2 strictement décroissante

$f_2(t) = 2-t \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$

$f_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ car $2-0 = 2 = f_2(0)$



b) $f_3(t) = \cancel{B}\ \dfrac{1-(1-t)^3}{t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^*$

$= \dfrac{1 - 1 + 3t - 3t^2 + t^3}{t}$

$= 3 - 3t + t^2$

$= t^2 - 3t + 3$

$f_3 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ car $0 - 3\times 0 + 3 = 3 = f_3(0)$

Copie anonyme - n°anonymat : 619451

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | **Nombre de pages :** 25 | **Session :** 2024

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$f_3'(t) = 2t - 3 > 0 \quad \forall\, t > \frac{3}{2}$

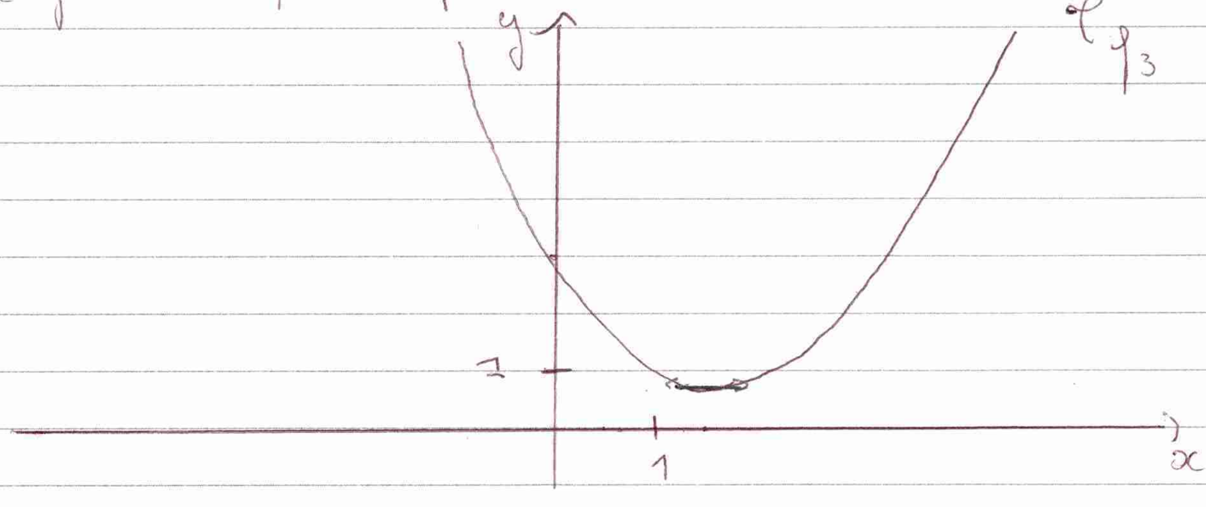
t	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f_3'(t)$	$-$	0	$+$
$f_3(t)$	$+\infty \searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow +\infty$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 3$

$= \frac{9 - 18 + 12}{4}$

$= \frac{3}{4}$

$T_{\frac{3}{2};y} = 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$



c). par quotient de fonctions usuelles,

$f_m \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*)$

$\in \mathcal{C}(\mathbb{R}_-^*)$

Montrons que $f_m(t) \xrightarrow[0]{} m$

on utilise un Développement limité sur $(1-t)^n$.

En effet d'après Taylor-Young $(1-t)^n \underset{0}{=} 1 - nt + o(t)$

donc $f_n(t) \underset{0}{=} \dfrac{1 - 1 + nt + o(t)}{t} \underset{0}{=} n + o(1) \underset{0}{\longrightarrow} n$

ainsi, on a bien $\boxed{f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})}$

d]. f_n est dérivable en 0 si seulement si $\dfrac{f_n(t) - f_n(0)}{t-0} \in \mathbb{R}$

$$\frac{f_n(t) - f_n(0)}{t - 0} = \frac{\frac{1-(1-t)^n}{t} - n}{t}$$

$$= \frac{1-(1-t)^n - nt}{t^2}$$

en appliquant le développement limité sur $(1-t)^n$:

$$\frac{f_n(t) - f_n(0)}{t - 0} \underset{0}{=} \frac{1 - (1 - nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 + o(t^2)) - nt}{t^2}$$

$$\underset{0}{=} - \frac{\frac{n(n-1)}{2}t^2}{t^2} + o(t^2)$$

$$\underset{0}{=} -\frac{n(n-1)}{2} \in \mathbb{R}$$

donc f_n est dérivable en 0 et $\boxed{f_n'(0) = -\frac{n(n-1)}{2}}$

e]. ~~Si $t = 0$ $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}$~~

Si $t=0$ $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}t^{k-1} = (-1)^2\binom{n}{1}0^0 + 0$

$= \binom{n}{1}$ car $0^0 = 1$

$= n$

$= f_n(t)$

si $t \neq 0$ $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}t^{k-1} - (-1)^1\binom{n}{0}t^{0-1}$

$= \frac{(-1)}{t}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t)^k 1^{n-k} + \frac{1}{t}$

d'après le binôme de Newton $= \frac{1}{t} - \frac{(1-t)^n}{t}$

$= \frac{1-(1-t)^n}{t}$

ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$ $\boxed{f_n(t) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}t^{k-1}}$

3.a] $I_1 = \int_0^1 \frac{1-(1-t)}{t}\,dt = \int_0^1 1\,dt \boxed{= 1}$

$I_2 = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^2}{t}\,dt = \int_0^1 2-t\,dt = \int_0^1 2\,dt - \int_0^1 t\,dt$

$= [2t]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} \boxed{= \frac{3}{2}}$

$I_3 = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^3}{t}\,dt = \int_0^1 t^2\,dt - \int_0^1 3t\,dt + \int_0^1 3\,dt$

$= 1 - \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^1 + 3$

$= 4 - \frac{3}{2}$

$\boxed{= \frac{5}{2}}$

b] $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$ on d'après 2.e]

$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}t^{k-1}$

$$I_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1} \, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 (-1)^{k+1} t^{k-1} \, dt$$ par linéarité de l'intégrale

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^2 \int_0^1 (-1)^{k-1} t^{k-1} \, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 (-t)^{k-1} \, dt = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} \, dt$$

on $\cancel{\int_0^1 (-1)^{k-1} \, dt = \left[\frac{(-t)^k}{k} \right.}$

on $\int_0^1 t^{k-1} \, dt = \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^1 = \frac{1}{k}$

$$\boxed{\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \; I_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}}$$

C7. $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on veut $\int_0^1 (1-t)^{k-1} \, dt$

on pose $u = 1-t$ (bijectif) $du = -dt$

$(1-t)^{k-1} \, dt = u^{k-1} \, dt$
$= -u^{k-1} \, du$

$\frac{t}{u}$ $0 \leftarrow 1$
$1 \leftarrow 0$

$$\int_0^1 (1-t)^{k-1} \, dt = \int_1^0 -u^{k-1} \, du$$

$$= \int_0^1 u^{k-1} \, du$$

$$= \left[\frac{u^k}{k} \right]_0^1$$

$$\boxed{= \frac{1}{k}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 619451

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 25	Session : 2024

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

~~d]. ainsi $I_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ d'après 3.b]~~

$$\cancel{= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \int_0^1 (1-t)^{k-1} dt}$$

$$\cancel{= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 (t-1)^{k-1} dt}$$

~~on $\int_0^1 (t-1)^{k-1} dt = \int_{-1}^{0} u^{k-1} du$ avec $u = t-1$~~

$$\cancel{= \left[\frac{u^k}{k} \right]_{-1}^{0}}$$

$$=$$

on admet le résultat $I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

e]. $\boxed{I_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty}$ en effet il $\frac{1}{k} = \frac{1}{k^1}$

et donc d'après Riemann la série diverge

4.a] Soit $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2px) dx$

On fait une intégration par partie :

$u(x) = x \in \mathcal{C}^1([0; \frac{\pi}{2}])$ $\quad v(x) = -\frac{\cos(2px)}{2p} \in \mathcal{C}^1([0; \frac{\pi}{2}])$

$u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = \sin(2px)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2px)\,dx = \left[-\frac{\cos(2px)\,x}{2p}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2px)\,dx$$

$$= -\frac{\cos(\pi p)\times\frac{\pi}{2}}{2p} + \frac{1}{2p}\left[\frac{\sin(2px)}{2p}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi\times(-\cos(\pi p))}{4p} + 0$$ car on a soit $\sin(\pi p)$ soit $\sin(0)$ et dans les deux

or $p\in\mathbb{N}^*$ donc $\cos(\pi p) = 1$ si p pair $= 0$ sinon car comme $p\in\mathbb{N}^*$ c'est nul.

d'où $\cos(\pi p) = (-1)^p$

ainsi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2px)\,dx = \frac{\pi\times(-1)^p\times(-1)}{4p}$

$$\boxed{= \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}}$$

c] d'après 4.b], $\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}\sin(2px) = 2^m\sin(mx)\cos(x)^m$

$$\Rightarrow \frac{x}{2^m}\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}\sin(2px) = x\sin(mx)\cos(x)^m$$

on intègre des deux côtés :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(mx)\cos(x)^m\,dx = u_m$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2^m}\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}\sin(2px)\,dx = \sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}\times\frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2px)\,dx$$

$$= \sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}\frac{1}{2^m}\frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}$$ d'après 4.a

$$= \frac{\pi}{2^{n+2}} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{(-1)^{p+1}}{p}$$ or la somme est pas valide en 0.

donc $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(2px)\,dx = \frac{\pi}{2^{n+2}} \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} \frac{(-1)^{p+1}}{p}$$

$$= \frac{\pi}{2^{n+2}} I_n \quad \text{d'après 3.b}$$

ainsi on a bien $\boxed{u_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} I_n}$

Partie B :

5.a) $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ $$\varphi_x'(t) = \frac{-(1-t) - (x-t)\times(-1)}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{-1 + t + x - t}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{x-1}{(1-t)^2}$$

$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ $(1-t)^2 > 0$

or $x \in [0;1[\Rightarrow 0 \leq x < 1$

$-1 \leq x-1 < 0$

donc $\varphi_x'(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

φ_x est strictement décroissante

t	$-\infty$	1	$+\infty$
$\varphi_x(t)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

$$\varphi_x(t) \underset{-\infty}{=} \frac{-t + o(t)}{-t + o(t)} \xrightarrow[-\infty]{} 1$$

$$\varphi_x(t) \xrightarrow[1^-]{} -\infty \qquad \varphi_x(t) \xrightarrow[1^+]{} +\infty$$

$$\varphi_x(t) \underset{+\infty}{=} \frac{-t + o(t)}{-t + o(t)} \xrightarrow[+\infty]{} 1$$

~~b] $\forall x \in [0;1[$ et $\forall t \in [0;x]$ on a :~~

c] Trouvons $a \in \mathbb{R}$ tq $\dfrac{\varphi_x(t)}{1-t} = \dfrac{x-1}{(1-t)^2} + \dfrac{a}{1-t}$

$$\frac{\varphi_x(\cancel{1-t}\ t)}{1-t} = \frac{x-t}{(1-t)^2}$$

ainsi $\dfrac{(x-t)}{(1-t)^2} = \dfrac{x-1}{(1-t)^2} + \dfrac{a}{1-t}$

$$\Rightarrow \frac{x-t}{(1-t)^2} = \frac{x-1+a-at}{(1-t)^2}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{x-t}{(1-t)^2} = x}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} -1 = -a \\ x-1+a = x \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

donc $\boxed{\dfrac{\varphi_x(t)}{1-t} = \dfrac{x-1}{(1-t)^2} + \dfrac{1}{1-t}}$

6.a] $h(x) = -\ln(1-x)$

$$h'(x) = -\frac{\times(-1)}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} > 0 \quad \forall x \in [0;1[$$

donc h est strictement croissante

x	0		1
$h(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$h(0) = 0$

$h(x) \xrightarrow[1]{} +\infty$

Copie anonyme - n°anonymat : 619451

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 25	Session : 2024

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6.b] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt$

$\displaystyle= \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\,dt$ par linéarité de l'espérance

$\displaystyle= \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^{k}\,dt$

$\displaystyle= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt$

~~ainsi~~ $\displaystyle\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + R_n(x) = \int_0^x \frac{1-t^n + \varphi_n(t)^n}{1-t}\,dt}$

$\displaystyle\cancel{= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} + \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,dt}$

$\displaystyle\cancel{= \int_0^x}$

échec pour la suite.

Exercice 3 :

Partie I :

1] h étant croissante, et donc monotone elle admet nécessairement une limite

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

comme elle est bornée, d'après le théorème de la limite monotone on peut même préciser qu'elle

$\boxed{\text{converge}}$

2] ~~$P(X \geq t) \leq P(Y \leq t)$~~

h est une fonction bornée.

Ainsi par définition $h(X)$ et $h(Y)$ sont des variables bornées et admettent donc chacune une espérance

$$\boxed{\begin{array}{l} E(h(X)) \text{ existe} \\ E(h(Y)) \text{ existe} \end{array}}$$

3. On pose $\sum_{k=1}^{N} h(k) - h(k-1)$ la somme partielle de cette série

$$\sum_{k=1}^{N} h(k) - h(k-1) = \sum_{k=1}^{N} h(k) - \sum_{k=1}^{N} h(k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} h(k) - \sum_{k=0}^{N-1} h(k)$$

$$= h(N) - h(0) \quad \text{par télescopage}$$

or $h(0) \in \mathbb{R}$ et d'après 1] on sait que h converge. On note $l \in \mathbb{R}$ sa limite

ainsi $\boxed{\sum^{+\infty} h(k) - h(k-1) = l - h(0) \in \mathbb{R} \text{ et cette série converge}}$

4b $\cancel{\sum_{k=1}^{+\infty}(h(k)-h(k-1))P(X\geq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X\geq k)h(k) - \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)P(X\geq k+1)}$

$\cancel{= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X\geq k)h(k) - \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)P(X\geq k+1)}$

$= \cancel{E(h(X-1)) - h(0}$

soit $\sum_{n=1}^{+\infty}(h(n)-h(n-1))P(X\geq n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} h(n)P(X\geq n)$ $\cancel{\leq E(h(X))}$

~~on $E(h(X)) \in \mathbb{R}$ et existe d'après 2]~~

~~donc $\sum^{+\infty}(h(n)-h(n-1))P(X\geq n)$ converge~~

~~5. on admet le résultat~~

~~6. $E(h(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)P(X$~~

~~on $\sum_{n=1}^{+\infty} h(n)P(X\geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} h(n)\sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k)$~~

~~$k\geq n$ donc $h(k)\geq h(n)$ car h est croissante~~

~~$\sum_{n=1}^{+\infty} h(n)P(X\geq n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} h(k)P(X=k) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} h(k)P(X=k)$~~

~~$\leq \sum_{n=1}^{+\infty}$~~

6] $E(h(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)P(X=n)$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)(P(X\geq n)-P(X\geq n+1))$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)P(X\geq n) - \sum_{n=1}^{+\infty} h(n-1)P(X\geq n)$

$P(X\geq 0)=1$ $\quad = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty}(h(n)-h(n-1))P(X\geq n)$

d'où $h(0)P(X\geq 0)=1$

on a bien l'égalité demandée :

$$\boxed{E(h(X)) = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1)) P(X \geq n)}$$

7. ainsi si $X \leq_{st} Y$

$\Rightarrow P(X \geq n) \leq P(Y \geq n)$

$(h(n) - h(n-1)) P(X \geq n) \leq (h(n) - h(n-1)) P(Y \geq n)$ possible car h est croissante et donc $h(n) - h(n-1) > 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1)) P(X \geq n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1)) P(Y \geq n)$

$\Rightarrow E(h(X)) \leq E(h(Y))$

ainsi $\boxed{\text{si } X \leq_{st} Y \text{ alors } E(h(X)) \leq E(h(Y))}$

Partie II :

4. Le théorème est le suivant :

$\boxed{X \text{ est stochastiquement inférieure à } Y \text{ ssi } E(h(X)) \leq E(h(Y))}$

Partie III :

1. $P(X \leq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k \cap Y \geq k)$ d'après les formules de loi de couple

or X et Y sont indépendantes $\boxed{\text{d'où } P(X \leq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) P(Y \geq k)}$

2. Z est de même loi que X

ainsi $Z \leq_{st} Y$

et donc $P(Z \geq k) \leq P(Y \geq k)$

$P(X = k) P(Z \geq k) \leq P(X = k) P(Y \geq k)$

$P(X \leq Y) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) P(Z \geq k)$

Copie anonyme - n°anonymat : 619451

Code épreuve : 284	**Nombre de pages :** 25	**Session :** 2024
Épreuve de : MATHEMATIQUES		

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

ainsi on a bien :

$$\boxed{P(X \leq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)P(Z \geq k)}$$

3. $P(Z \geq X) = \cancel{\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z = X)}$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k \cap Z \geq k)$ d'après les lois de couple

or Z et X sont indépendantes $\quad \boxed{= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)P(Z \geq k)}$

4. ~~$P(Z=X) = P(Z \geq X) - P(Z > X)$~~

~~$= P(Z \geq X) - P(Z \geq X+1)$~~

~~$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)P(Z \geq k) - P(X=k-1)P(Z \geq k+1)$~~

échec.

Exercice 4 :

1. $\mathcal{E}_n = \{A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}$

les matrices formées dans $A(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont étagées et donc leur famille est libre ainsi $\mathcal{E}_m$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \text{vect}(e_i \lambda_{m-i+1} \; ; \; 1 \leq i \leq m)}$$

2.a $m=2$.

$$A(1;1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(1;1) - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow \lambda L_2 + L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & (1-\lambda)(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

donc $\lambda \in sp(A(1;1))$ si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$

donc $\boxed{sp(A(1;1)) = \{1 ; -1\}}$

b) $A(1;-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A(1;-1) - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow \lambda L_2 + L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda \in sp(A(1;-1))$ ssi $-\lambda^2 - 1 = 0$
ssi $\lambda^2 = -1$ absurde

$$\boxed{sp(A(1;-1)) = \{\emptyset\}}$$

c) Si je prend $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $M = A(0;2)$

$Rg(M) = 1 \Rightarrow \dim(\ker(M)) \neq 0$ et M n'est pas inversible.

$\boxed{\text{Ainsi toutes les matrices de } \Sigma_2 \text{ ne sont pas inversibles}}$.

d] non par exemple d'après 2.b] $\mathrm{card}(\mathrm{sp}(A(1;-1))) = 0$

ainsi $A(1;-1)$ n'est pas diagonalisable

$\boxed{\text{et toutes les matrices de } \Sigma_2 \text{ ne sont pas diagonalisables}}$

e] Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$.

on considère λ' une éventuelle valeur propre de M

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

on utilise déterminant de M :

$\lambda \in \mathrm{sp}(M)$ ssi $\lambda^2 - \lambda_1\lambda_2 = 0$

ssi $\lambda^2 = \lambda_1\lambda_2$

ainsi

si	$\lambda_1\lambda_2 < 0$	il y a 0 valeurs propres
si	$\lambda_1\lambda_2 = 0$	il y a 1 valeur propre (qui est 0)
si	$\lambda_1\lambda_2 > 0$	il y a 2 valeurs propres

f. $A(0;\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $0 \in \mathrm{sp}(A(0;\lambda))$

et même il y a une seul valeur propre qui est 0.

$A(0;\lambda)$ est diagonalisable ssi $\dim(\mathrm{Ker}(A - \overset{0 \times I}{\cancel{\lambda I}})) = 2$ car une seule valeur propre

ssi $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$

on $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(A)) = 0$

donc $\boxed{\text{avec } \lambda = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}}$

~~q7 $A(\omega)$ est diagonalisable si elle admet deux valeurs propres ou si elle est nulle~~

~~$P(A(\omega)$ est diagonalisable$) = P(XY > 0 \cup X = Y = 0)$~~

~~événements incompatibles $= P(XY > 0)$~~

3.a7 $A(1;1;1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Rg(A) = 3 \Rightarrow \dim(\ker(A)) = 0$

ainsi $\boxed{A \text{ est inversible}}$

b. $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Rg(A - I) = 1 \Rightarrow \dim(\ker(A - I)) = 2$

$\boxed{1 \in sp(A)}$

$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim(\ker(A+I)) = 1 \Rightarrow \boxed{-1 \in sp(A)}$

c7. d'après la question précédente $\dim(E_1) = 2$
$\dim(E_{-1}) = 1$

donc $\dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = 3$

$\Rightarrow \boxed{sp(A) = (-1;1)}$ et $A(1;1;1)$ est diagonalisable

Copie anonyme - n°anonymat : 619451

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 85	Session : 2024

Emplacement QR Code

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

e. $\boxed{\begin{array}{l} A(1;1;1) \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R} \\ \text{en revanche } A(-1;0;1) \text{ n'est pas diagonalisable} \end{array}}$

~~4.a. soit $a_{i,j}$ les coefficients de $A(\lambda)$~~

~~$p_{i,j}$ les coefficient de $A(\mu)$~~

~~$a_{i,j} = \{ \lambda_j$ si $i = n+1-j$~~

$$\begin{pmatrix} & & \lambda_n \\ & \iddots & \\ \lambda_1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \mu_n \\ & \iddots & \\ \mu_1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \lambda_n & & & \\ & \mu_2 \lambda_{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \lambda_1 \end{pmatrix}$$

~~donc avec $(c_{i,j})$ les coordonnées de $A(\lambda)A(\mu)$,~~

~~$c_{i,j} =$~~

donc $A(\lambda)A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 \lambda_n & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \lambda_1 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751