Copie anonyme - n°anonymat : 997815

W8-00465 997815 Maths B/L

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 27 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice

Partie I

1) Pour (u_n) : $n^{n+1/2} \neq 0$ car $n \in \mathbb{N}^*$

$\rightarrow (u_n)$ définie

Pour (v_n) : il faut $u_n \neq 0$ (ln)

-OR $n! e^n > 0$ (produit de deux strictement positifs)

$\rightarrow \ln(u_n)$ existe

(v_n) définie

2) $v_n - v_{n+1} = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

$\Rightarrow v_n - v_{n+1} = \ln\left(\frac{\frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}{\frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}}\right) = \ln\left(\frac{n! e^n (n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}} \times (n+1)! e^{n+1}}\right)$

$$= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+3/2}}{(n+1)n^{n+1/2}e}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{e}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1/2}}{n^{n+1/2}}\right) - \ln e$$

$$= \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right] - 1 \qquad = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$$

Ceci étant vrai $\forall n \in \mathbb{N}^*$!

3) a) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

b) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3} + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)$

$$= \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n^2}}{2} + \frac{\frac{1}{n^3}}{3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

En injectant dans $v_n - v_{n+1}$: $v_n - v_{n+1} = \frac{n}{n} - \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$+ \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} - 1$$

$$(=) \quad u_n - u_{n+1} = \cancel{-\frac{1}{2n}} + \frac{1}{3n^2} + \cancel{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\frac{1}{12n^2}$

$$= \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or on cherche $\varepsilon :]0,1[\to \mathbb{R}$

$$/ \quad u_n - u_{n+1} = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut dire $\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6n}$

Mais bon on a bien

$$u_n - u_{n+1} = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12n^2} + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Or $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ → série de Riemann convergente !

$\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ CV vers 0, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CV ainsi que $\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (cf cours)

(=) la série CV.

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n - u_{n+1}$ CV $\Leftrightarrow$ A partir d'un certain rang, le reste de la série CV vers 0

c'est à dire APCR, $u_n - u_{n+1} \to 0$

donc $n \to +\infty$, $u_n - u_{n+1} \to 0$

~~$u_n \to u_{n+1}$~~, $u_{n+1} \to u_n$

$\Rightarrow$ la série converge

5) $v_n = \ln(u_n)$

$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell > 0$

par l'absurde : soit $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

alors $\ln(u_n) = v_n$ diverge

IMPOSSIBLE

$\Rightarrow (u_n)$ CV vers un réel strictement positif

Partie II

6) a) $0 < t \leq 1$ (par définition de l'intégrale)

$\Rightarrow$ $t \times 0 < t^2 \leq 1$

$\Rightarrow$ $0 \leq 1 - t^2 \leq 1$

$\Rightarrow$ $0 \leq (1-t^2)^n \leq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

or, on intègre cette valeur positive sur un intervalle ~~positif~~

croissant $\rightarrow$ $\int_0 (1-t^2)^n \, dt > 0$,

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 997815

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | **Nombre de pages :** 27 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

inégalité stricte car $n \neq 0$, $(1-t^2)^n = 1$ |

b) $I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 \, dt = \int_0^1 1 \, dt$

$= [t]_0^1 = 1$

$I_1 = \int_0^1 1 - t^2 \, dt = \int_0^1 1 \, dt - \int_0^1 t^2 \, dt$

$= 1 - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ |

$I_2 = \int_0^1 (1-t^2)^2 \, dt = \int_0^1 1 - 2t^2 + t^4 \, dt$

$= 1 - \frac{2}{3} + \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5+3}{15}$

par I_0 et I_1 ✓

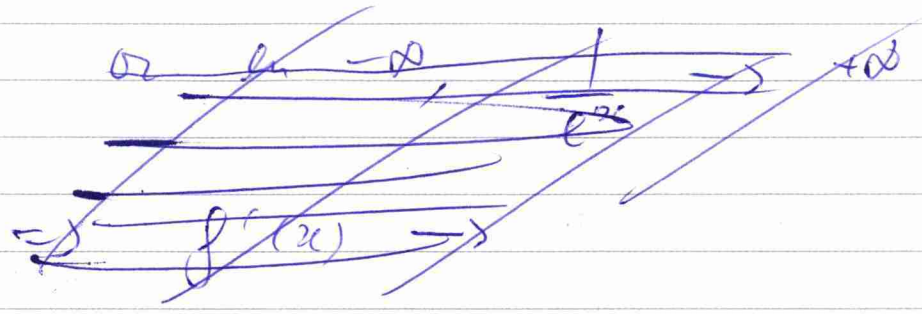
$= \frac{8}{15}$ + $\frac{15}{15}$

7) a) Soit $f(x)$ / $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} - 1 + x$

f dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables : $f'(x) = 1 - e^{-x}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$f'(x) = 1 - \frac{1}{e^x}$ f croissante sur $\mathbb{R}$



or, en $-\infty$, $f(x) = \frac{1}{e^x} + x - 1$ Δ domine par e^{-x}

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

f est donc toujours positive sur $\mathbb{R}$

donc $e^{-x} + x - 1 \geq 0$

(Σ) $e^{-x} \geq 1 - x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $I_n \geq 0$ d'après 6a) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 - t^2 \leq e^{-t^2}$$

$$(1-t^2)^n \leq e^{-nt^2}$$

→ intégrale sur bornes croissantes d'une valeur positive ⇒ conserve l'inégalité

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \leq \int_0^1 e^{-nt^2} \, dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2} \, dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

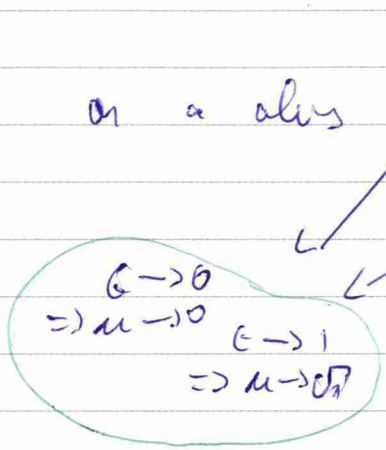
8) a) ~~[illegible]~~

~~initialisation en $n=1$: $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt = \left[\frac{-e^{-t^2}}{2t}\right]_0^1$~~

$u^2 = nt^2 \Rightarrow u = \sqrt{n}\,t \qquad t = \frac{u}{\sqrt{n}}$

changement de variable

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad dt = \frac{du}{\sqrt{n}}$$



on a alors $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{n}}\,du = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\,du$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$t \to 0 \Rightarrow u \to 0$

$t \to 1 \Rightarrow u \to \sqrt{n}$

CQFD

$n > 0$ car $\frac{1}{\sqrt{n}}$ l'impose

b) D'après 7 b) $0 \leq I_n \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\,du$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{e^{u^2}}\,du$$

Soit $n \to +\infty$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{u^2}}\,du$ est plus rapide qu'une intégrale de Riemann $\hookrightarrow$ CV

$$0 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{u^2}}\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par les gendarmes, I_n converge vers 0

g) a) $I_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt$ ...

par I.P.P

~~$= \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t^2) dt$~~

$= \left[t(1-t^2)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 n+1 (1-t^2)^n \times (-2t) \times t \, dt$

$= 0 + (n+1) \int_0^1 (1-t^2)^n \, 2t \, dt$

Problème

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 997815

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 27	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10) a) $\frac{I_n}{u_n^2} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} + \frac{(n^{n+\frac{1}{2}})^2}{(n! e^n)^2}$

$$= \frac{(2^n n! n^{n+\frac{1}{2}})^2}{(2n+1)! (n! e^n)^2}$$

$$\ln\left(\frac{I_n}{u_n^2}\right) = 2\left[n \ln 2 + \ln n! + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n\right] - \ln((2n+1)!) - 2\ln n! - 2n$$

$$= 2n(\ln 2 - 1) + (2n+1)\ln n - \ln(2n+1)!$$

$$= 2n(\ln 2 - 1) + (2n+1)\ln n - \sum_{k=2}^{2n+1} \ln k$$

Inférieure

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

II) a) - f_n continue par morceaux | (intégrable)

- $\forall t \in [0,1]$, $f_n(t) \geq 0$ (produit de termes pos. etc) |

- enfin, $\int_0^1 \frac{1}{I_n} (1-t^2)^n \, dt$

$= \frac{1}{I_n} \times \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt = \frac{1}{I_n} \times I_n$

$= 1$ |

f_n est une densité de probabilité

b) Si $E(X_n)$ existe,

$E(X_n) = \int_0^1 t \, f_n(t) \, dt$ |

→ intégrale finie, (continue) X_n possède un espérance

$E(X_n) = \frac{1}{I_n} \int_0^1 t (1-t^2)^n \, dt$

$= \frac{1}{I_n} \left(\left[\quad \right] - \int \quad \right)$ (IPP)

infructueux

6) De la ~~même~~ même manière,

$$E(X_n^2) = \frac{1}{I_n}\int_0^1 \underbrace{t^2(1-t^2)}_{\text{Existe (continue) sur } [0,1]} dt$$

$$\mathrm{Var}(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$

Infructueuse

Problème

Partie I

1) a) Valeur propre que nous noterons VP
Vecteur propre que nous noterons $\vec{VP}$

λ VP de $A \iff \exists X \neq 0 / AX = \lambda X$
↳ $\vec{VP}$ ('X vecteur colonne)

$X \vec{VP}$ de $A \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} / AX = \lambda X$
$X \neq 0$

b) $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$

c) n VP distincts en dimension n
$\iff$ A diagonalisable

2) a) Matrice diagonale supérieure
$\Rightarrow$ les valeurs sur la diagonale constituent le spectre

$\frac{1}{2}$ et 1 sont VP

Par lecture de colonne : $\vec{g}$ endomorphisme associé
$\vec{g}(\vec{e_2}) = 1(0, \vec{e_2})$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\vec{VP}$ associé à 1

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018751

Copie anonyme - n°anonymat : 997815

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 27	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

De plus, $g(e_1 - e_2) = \left(\frac{e_1}{2} ; -\frac{e_2}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}(e_1, -e_2)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est $\vec{VP}$ associé à $\frac{1}{2}$

$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$E_{\frac{1}{2}} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

b) Oui. ~~2 VP distincts en dim 2~~,

$\det(A) = \frac{1}{2} - 0 \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ vérifie $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) Oui - 2 VP distinctes en dim 2
(et somme des dim des sep égale à 2)

$A = PDP^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie II

3) $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc F_n part de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

$P'(X)$ de degré au plus $n-2$

$\frac{1}{n} - X P'(X)$ ——— $n-1$ ainsi que $P(X)$

$Q(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

F_n va de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

De plus soit $(P, T) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$
$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$F_n(\lambda P + \mu T) = (\lambda P + \mu T)(X) + \frac{1-X}{n}(\lambda P + \mu T)'(X)$$

$$= \lambda P(X) + \mu T(X)$$

$$+ \lambda \frac{1-X}{n} P'(X) + \mu \frac{1-X}{n} T'(X)$$

$$= \lambda \left(P(X) + \frac{1-X}{n} P'(X) \right)$$

$$+ \mu \left(T(X) + \frac{1-X}{n} T'(X) \right)$$

$$= \lambda F_n(P) + \mu F_n(T)$$

$\longrightarrow$ linéaire !

$\longrightarrow$ endomorphisme

4) a)

P_1 s.t de degré $n-1$

P_2 ——— $n-2$

$\vdots$

P_n ——— 0

de degrés différents $\Rightarrow (P_1, \dots, P_n)$ libre !

n vecteurs libres dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ famille libre maximale de dim n

$\Rightarrow$ génératrice de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

b)

$$Q_n = F_n(P_n) = P_n(X) + \frac{1-X}{n} P_n'(X)$$

$$= X^0 + \frac{1-X}{n} \times 0$$

$$Q_n = 1 \text{ !}$$

c) $Q_k(x) = \Phi_k F_n(P_k)$

$= P_k(x) + \frac{1-x}{n} P_k(x)'$

$= x^{n-k} + \frac{1-x}{n} + (n-k)x^{n-k-1}$

$= x^{n-k} + \frac{n-k}{n} x^{n-k+1} - \frac{x^{n-k}(n-k)}{n}$

$= \frac{n-k}{n} P_{k+1}(x) + \frac{n x^{n-k}}{n} - \frac{n x^{n-k} + k x^{n-k}}{n}$

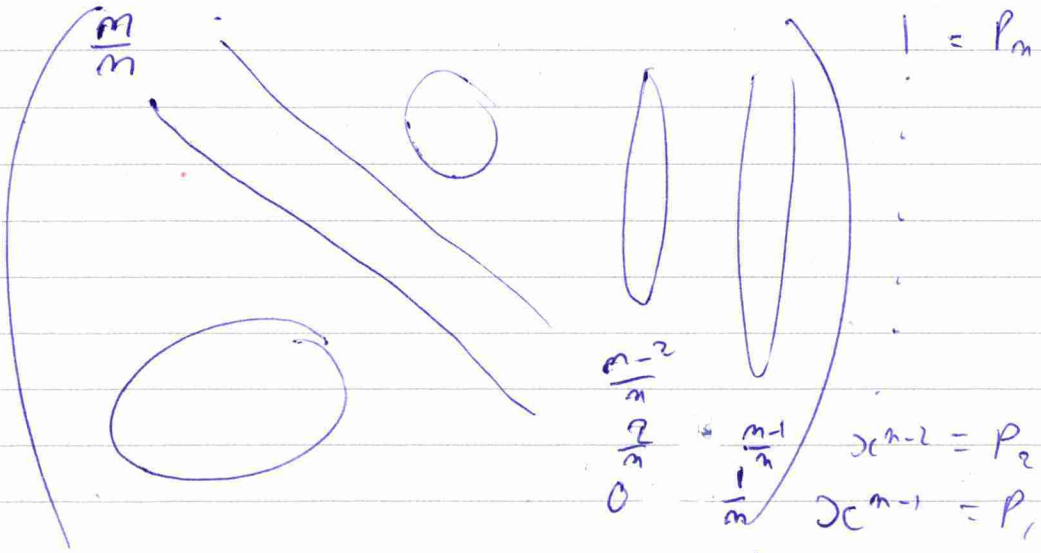
$= \frac{n-k}{n} P_{k+1}(x) + \frac{k}{n} x^{n-k}$

$= \frac{n-k}{n} P_{k+1}(x) + \frac{k}{n} P_k(x)$

CQFD

d)

$F_n(P_n)$ $F_n(P_2)$ $F_n(P_1)$



triangulaire inférieure

On numérote à droite l'ordre des degrés

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 997815

Code épreuve : 2 84	Nombre de pages : 27	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

car $F_n(P_1) = Q_1(x) = \frac{1}{n} P_1(x) + \frac{n-1}{n} P_2(x)$

$F_n(P_2) = \frac{2}{n} P_2(x) + \frac{n-2}{n} P_3(x)$

$\vdots$

$F_n(P_n) = P_n$ (par $F_n(P_n) = P_n(x) + \frac{1-x}{n} \underbrace{P'(x)}_{0}$)

coefficients diagonaux : $\left\{ \frac{n}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots, \frac{2}{n}, \frac{1}{n} \right\}$ ($\frac{n}{n} \to 1$)

5) M_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 = P_n \\ x^1 = P_{n-1} \end{matrix}$$

$n = 2$ F_2
$\Rightarrow$ Polynômes de degré au plus 1

$F_2(P_{n-1}) = Q_{n-1}(x) = \frac{n-1}{n} P_{n-1}(x) + \frac{1}{n} P_n(x)$

On a donc, $x^0 = P_n$
$x^1 = P_{n-1}$

~~$F_2(x) = x + \frac{1-x}{2}$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

→ matrice triangulaire inférieure
→ les vp sont sur la diagonale

1 est vp associé au vp $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
1/2 est vp ——— $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ (par lecture des colonnes)

$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$

$E_{1/2} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

b)

$F_2(S)$ transforme x en $2x+1$

Il faut un S / $S(x) + \frac{1-x}{2} S'(x) = 2x+1$

S nécessairement de deg 1

S' constante

On trouve ~~$S(x) = 4x+1$~~ $\boxed{S(x) = 4x-1}$

~~$F_2(S) = 4x+1 + \frac{1-x}{2} \times 4$~~

~~$= 4x+1+$~~

En effet $F_2(S) = 4x+1 + \frac{(1-x)}{2} 4$

$= 4x - 1 + 2 - 2x = 2x+1$

F_2 est inversible (car $\det(F_2) = \frac{1}{2}$), F_2 est bijective

$\Leftrightarrow$ cette solution est unique

6) ~~a) Matrice triangulaire diagonale VP sur la diagonale~~

~~$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$ sont distincts~~

a) M_n est étagée (de par les 0)

Ses colonnes sont toutes libres.

$\Rightarrow$ rg $M_n = n$

$\Rightarrow$ M_n inversible

b) Matrice triangulaire : VP sur la diagonale

On a $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1$ comme VP

c) oui n VP distincts en dim n

$\longrightarrow$ M_n diagonalisable

d)

Par lecture de la matrice

VP : 1 ~~4~~. Sur notre matrice en 4d) : $F_n(P_n) = P_n$

dès lors, $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

(notons que nous avons fait le choix de numéroter la matrice dans l'ordre croissant du degré et non des numéros de P_k, ce qui peut impacter le sens des numéros sur le vecteur)

$\hookrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans l'ordre $P_1, P_2, \dots, P_n$

7) a) $F_n(P) = P(X) + \frac{1-X}{n} P'(X)$

$= \frac{n-k}{n} P(X)$

$\Leftrightarrow P(1)\left(1 - \frac{n-k}{n}\right) = 0$ ($P'(1)=0$)

Soit $P(1)=0$ soit $\frac{n-k}{n} = 1$

$\Leftrightarrow k = 0$ impossible

$P(1)=0$

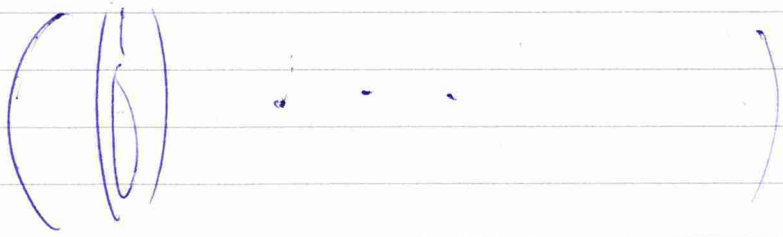
b) $P(X)\left(1 - \frac{n-k}{n}\right) = \frac{X-1}{n} P'(X)$

$P(X) = \frac{(X-1)P'(X)}{1 - \frac{n-k}{n}}$

$= (X-1)^2 \times Q(X)$

$Q = \frac{P'(X)}{1 - \frac{n-k}{n}}$

e) base de vecteurs propres de F_n



IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 997815

Code épreuve : 284	Nombre de pages : 27	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie III

10) $P(X_j = k) = P(X_j = k \mid X_{j-1} = k)\, P(X_{j-1} = k)$

$+ P(X_j = k \mid X_{j-1} = k-1)\, P(X_{j-1} = k-1)$

(le reste des probabilités sont nulles)

11) a) $P(X_{j+1} = k \mid X_j = k)$

$\cancel{= \dfrac{P(X_{j+1} = k \text{ et } X_j = k)}{P(X_j = k)}}$

$\cancel{P(X_{j+1} = k \text{ et } X_j = k)} = \boxed{P(\text{la } j+1\text{-ième commande soit faite sur un site déjà utilisé})}$

$= \dfrac{k}{n}$ → sites utilisés / → sites totaux

$P(X_{j+1} = k \mid X_j = k) = \dfrac{k}{n}$

5) ~~$P(X_{j+1} = k \mid X_j = k-1) = 0$~~

~~On effet on ne peut visiter~~ commander un ~~2 sites pour une seule~~

$$P(X_{j+1} = k \mid X_j = k-1) = \frac{n-(k-1)}{n} = \frac{n-k+1}{n}$$

→ ce sont les sites restants sur les sites totaux

$k \geq 2$ car $X_j \neq k-1$ à cause

c) $P(X_{j+1} = k \mid X_j = i) = 0$

On effet

De j à j+1, une commande est faite.

Il ne peut alors avoir que i ou i+1 sites visités en j+1. or $k \neq i$

$k \neq i+1$ et k ne peut être inférieur à i

=) aucune possibilité

d) Par la formule des probabilités totales

$$P(X_{j+1} = k) = P(X_{j+1} = k \mid X_j = k) P(X_j = k) + P(X_{j+1} = k-1 \mid X_j = k-1) P(X_j = k-1)$$

$= \frac{k}{n} P(X_j = k) + \frac{n-k+1}{n} P(X_j = k-1)$

12) $P(X_1 = k) = P(k$ sites commandes en une commande$)$

$$\begin{cases} P(X_1 = 1) = 1 \\ \text{sinon } P(X_1 = k \neq 1) = 0 \end{cases}$$

$$G_1(x) = \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = k) x^{n-k}$$

$= P(X_1 = 1) x^{n-1}$ (toutes les autres valeurs de la somme sont nulles)

$= x^{n-1}$

b) ~~$G_{j+1} =$~~

On remarque que ~~G_j~~ $G_1(x) = U_1(x)$ vs (9)

$\forall j \in \mathbb{N}^*$ par définition $U_{j+1} = F_n(U_j)$

$G_{j+1} = F_n(G_j)$

~~$G_{j+1} =$~~

$\Rightarrow G_1 = U_j \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$

Ce qui répond à c) et non à b)

c)

Retour sur 5)

$$G_{j+1}(x) = \sum_{k=1}^{n} P(X_{j+1}=k)\, x^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{n} P(X_j=k) + \frac{n-k+1}{n} P(X_j=k-1) \right] x^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{n} P(X_j=k)\, x^{n-k} + \frac{n-(k-1)}{n} P(X_j=k-1)\, x^{n-k} \right]$$

Je n'arrive pas à simplifier la forme de somme

/

d)

/

e)

/

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 997815

Emplacement QR Code

Code épreuve : 234 | Nombre de pages : 27 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

13) a) $G(X_j) = \sum_{k=1}^{n} n\, P(X=k)$

$= \sum_{k=1}^{n} n \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left(\frac{k-i}{i}\right)^{j-1} (-1)^i$

On admettra que cette ~~[illegible]~~ somme existe

→ X_j possède une espérance

b) $G_j(1) = \sum_{k=1}^{n} P(X_j=k) = 1$

C'est bien la somme des probabilités totales

c)

$G'_j(x)$ dérivable et $G'_j(x) = n-1\, x^{n-1-1}\, P(X_j=1)$

$+ n-2\, x^{n-3}\, P(X_j=2)$

$\vdots$

$= \sum_{k=1}^{n} (n-k)\, x^{n-k-1}\, P(X_j=k)$

$G'_j(1) = \sum_{k=1}^{n} (n-k)\, P(X_j=k)$

$= \sum_{k=1}^{n} n\, P(X_j=k) - \sum_{k=1}^{n} k\, P(X_j=k)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$= n \underbrace{\sum_{k=1}^{n} P(X_j = k)}_{1} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\, P(X_j = k)}_{E(X_j)}$$

$$= n - E(X_j) \longrightarrow G_j'(1) = n - E(X_j)$$

d)

$$G'_{j+1}(1) = n - E(X_{j+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (n-k)\, P(X_{j+1} = k) = \sum (n-k) \left[\frac{k}{n} P(X_j = k) + \frac{n-k+1}{n} P(X_j = k-1) \right]$$

Inductive

e)

$$G'_{j+1}(1) = q\, G'_j(1)$$

↳ avant

$$= qn - qE(X_j)$$

$$E(X_j) = \frac{qn - G'_{j+1}(1)}{q} = \frac{n}{q} - \frac{G'_{j+1}(1)}{q}$$

Inductive

g) /

Partie 4

14 a) $[T \leq j]$ il y a eu moins ou autant de j ~~commandes~~ clients différents quand les n sites marchands ont été utilisés

$[X_j = n]$ n sites différents pour j commandes (= le maximum)

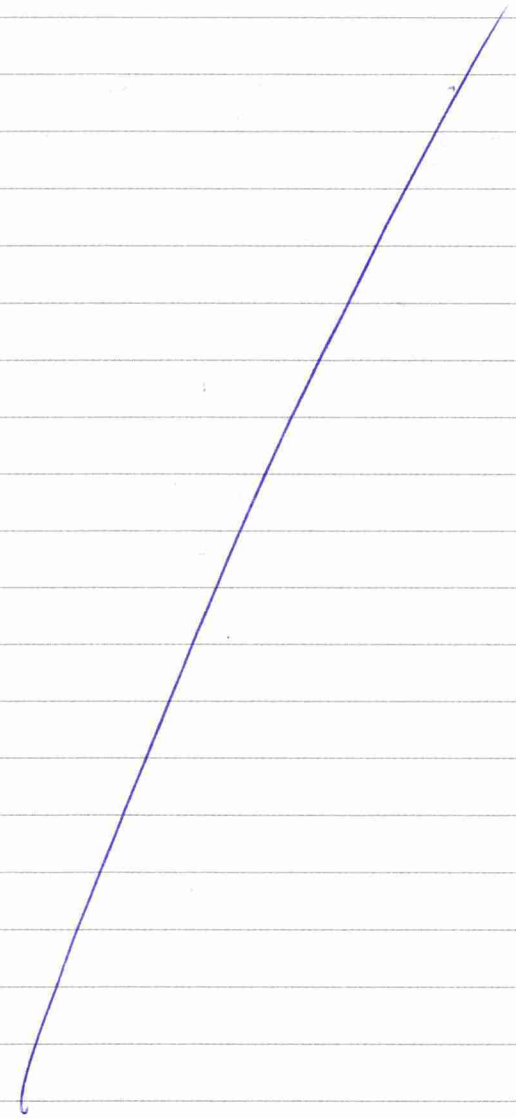
$n \leq j$

$\cancel{X_j = n \iff T = j}$

~~b)~~

15) a)

$\cancel{E(T-1)} =$



IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751