Copie anonyme - n°anonymat : 741803

P5-00430 741803 Maths B/L

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 24 | Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n! \, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$.

Pour que u_n soit bien définie il faut $n^{n+\frac{1}{2}} \neq 0$. or $n \neq 0$ donc u_n est bien définie

$v_n = \ln(u_n)$, v_n est bien définie si $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! \, e^n > 0$ et $n^{n+\frac{1}{2}} > 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$

Ainsi v_n est bien définie

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - v_{n+1} = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$

$$= \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$$

$$= \ln\left[\frac{\dfrac{n! \, e^n}{n^{n+1/2}}}{\dfrac{(n+1)! \, e^{n+1}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{n! \, e^n (n+1)^{n+3/2}}{n^{n+1/2}(n+1)! \, e^{n+1}}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{(n+1)^{n+3/2}}{n^{n+1/2}(n+1)\, e}\right]$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$u_n - u_{n+1} = \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} \cdot \frac{1}{e}\right]$$

$$= \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}\right] + \ln(e^{-1})$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

3) a) $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

b) On pose $y = \frac{1}{n}$, $y \to 0 \Leftrightarrow n \to +\infty$

$$u_n - u_{n+1} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$$

$$\underset{0}{=} \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+y) - 1$$

$$\underset{0}{=} \frac{2+y}{2y}\left[y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)\right]$$

$$= \frac{1}{2y}\left[2y + y^2 - y^2 - \frac{y^3}{2} + \frac{2y^3}{3} + o(y^3)\right]$$

$$= 1 + \frac{y}{2} - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{3} + o(y^2)$$

$$= 1 - \frac{3y^2+4y^2}{12} + o(y^2)$$

$$= 1 + \frac{y^2}{12} + o(y^2) =$$

$$= 1 + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) $v_n - v_{n+1} \sim \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ (3b)

or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{12n^2} = \frac{1}{12}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann)

~~de plus~~ Ainsi par equivalence les series (de terme general) $v_n - v_{n+1}$ et $\frac{1}{12n^2}$ sont de même nature.

Donc $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} v_n - v_{n+1}$ converge.

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n - v_{n+1} = \alpha$, car on sait qu'elle converge, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\lim_{n\to+\infty} v_1 - v_{n+1} = \alpha$ (série telescopique)

$\lim_{n\to+\infty} -v_{n+1} = \alpha - v_1$

$\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = v_1 - \alpha$ | $v_1 - \alpha \in \mathbb{R}$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

5) Soit $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ell$.

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = e^\ell$, $\forall \ell \in \mathbb{R}$, $e^\ell > 0$.

donc u_n converge vers un réel strictement positif

Partie II :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$.

6) a) $0 \leq t \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq t^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \geqslant -t^2 \geqslant -1$

$\Leftrightarrow 1 \geqslant 1-t^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 1 \geqslant (1-t^2)^n \geqslant 0$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, I_n est strictement positif par positivité de l'intégrale.

b) $I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 \, dt = \int_0^1 1 \, dt = \underline{1}$

$I_1 = \int_0^1 (1-t^2) \, dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$I_2 = \int_0^1 (1-t^2)^2 \, dt = \int_0^1 (1-2t^2+t^4) \, dt = \left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5}\right]_0^1$

$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

7) a) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction de fonctions qui le sont $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -e^{-x}$, de façon analogue, $f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f''(x) = e^{-x} > 0$ donc f est convexe, elle est donc supérieure ou égale à toutes ses tangentes

Soit la tangente en $x = 0$, $y = f(0) + f'(x)(x-0)$

$y = 1 + (-1)x$

$y = 1 - x$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\underline{1 - x \leq e^{-x}}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 741803

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284

Nombre de pages : 23

Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

7) b) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $x = t^2$

donc $1 - t^2 \leq e^{-t^2}$

$\Leftrightarrow (1-t^2)^n \leq e^{-nt^2}$

$\int_0^1 (1-t^2)^n dt \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt$

$I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt$

8) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 e^{-nt^2} dt =$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) On sait que $\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\,du$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-\frac{u^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\,du$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}\,du$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}\,du = 0$$

car $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}\,du$ converge et vaut 1 (densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$).

~~Enfin~~ ~~Ainsi~~ On a $0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2}\,dt$.

donc d'après le théorème d'encadrement I_n converge vers 0

g) a) $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \left[(1-t^2)^n - (1-t^2)^{n+1}\right] dt$

$$= \int_0^1 \left[1-t^2\right]^n \left[1-(1-t^2)\right] dt$$

$$= \int_0^1 t^2\left[1-t^2\right]^n dt.$$

$= \left[\frac{1}{2(n+1)}\left[1-t^2\right]^{n+1} t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2(n+1)}\left[1-t^2\right]^{n+1} dt$ Procédons à une Intégration par parties licite car $u, v \in C^1[0,1]$

$= \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 \left[1-t^2\right]^{n+1} dt$

$u = t \to u' = 1$

$v' = t\left[1-t^2\right]^n \to v = -\frac{1}{2(n+1)}\left[1-t^2\right]^{n+1}$

$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$

$I_n = \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1} + I_{n+1}$

$I_n = I_{n+1}\left[\frac{1}{2(n+1)} + 1\right]$

$I_n = I_{n+1}\left[\frac{2n+3}{2n+2}\right]$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} = \left[\frac{2k+2}{2k+3}\right] I_k$, $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\frac{I_{k+1}}{I_k} = \frac{2k+2}{2k+3}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k+1}}{I_k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+2}{2k+3}$$

$$\frac{I_n}{I_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+2}{2k+3}.$$

$\prod_{k=0}^{n-1} 2k+2 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdots (2n)$

$= (2\times 1)(2\times 2)(2\times 3)(2\times 4)\cdots(2\times n)$

$= 2^n \left[1 \times 2 \times 3 \times 4 \cdots \times n\right]$

$= 2^n n!$

$\prod_{k=0}^{n-1} 2k+3 = 3 \times 5 \cdots \times (2n+1)$

$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \cdots \times 2n \times 2n+1}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}$

$= \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

donc $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+2}{2k+3} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

$$\frac{I_n}{I_0} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}} \quad \text{car } I_0 = 1.$$

10) a) $$\frac{I_n}{u_n^2} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{n^{2n+1}}{(n! e^n)^2}$$

$$= \frac{2^n n^{2n+1}}{(2n+1)! e^n}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 741803

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 24 | Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

1) $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{I_n}(1-t^2)^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

a) $f_n(t)$ est continue sur $]-\infty;0[\cup]0,1[\cup]1;+\infty[$ car par morceau de fonctions qui le sont $t \mapsto \frac{1}{I_n}(1-t^2)^n$ sur $[0;1]$ car $I_n > 0$. et $t \mapsto 0$ sur $]-\infty;0[$ et $]1;+\infty[$.

$\forall t \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$, $f_n(t) = 0 \geq 0$.

$\forall t \in]0;1[$, $f_n(t) = \frac{1}{I_n}(1-t^2)^n$, on sait que $I_n > 0$ donc $\frac{1}{I_n} > 0$. de plus on a démontré que $(1-t^2)^n > 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}$ donc $f_n(t) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{I_n}(1-t^2)^n\,dt = \frac{1}{I_n} \cdot I_n = 1.$$

donc $f_n(t)$ est une densité de probabilité.

b) $E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{I_n} t(1-t^2)^n\,dt$

$= \frac{1}{I_n}\int_0^1 t(1-t^2)^n\,dt = \frac{1}{I_n}\left[-\frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1}\right]_0^1$

$= \frac{1}{I_n}\left[\frac{1}{2(n+1)}\right] = \frac{1}{2(n+1)I_n}$ $= \frac{(2n+2)!}{2(n+1)(2^n n!)^2}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) $E(X_M^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_M(t) = \int_0^1 t^2 \frac{1}{I_M} [1-t^2]^M dt.$

$= \frac{1}{I_M} \int_0^1 t^2 [1-t^2] dt$

$= \frac{1}{I_M} [I_M - I_{M+1}]$

$= 1 - \frac{I_{M+1}}{I_M} = 1 - \frac{\left(2^{M+1}(M+1)!\right)^2 (2M+1)!}{(2M+3)! \left(2^M M!\right)^2}$

$= 1 - \frac{2^{2M+2}(M+1)^2 (M!)^2 (2M+1)!}{(2M+3)! \, 2^{2M} (M!)^2}$

$= 1 - \frac{4(M+1)^2}{(2M+2)(2M+3)}.$

$V(X_M) = E(X_M^2) - (E(X_M))^2$

$=$

Problème : $n=2$

$p \neq q$

Partie I :

1) $A \in M_n(\mathbb{R})$

a) On appelle vecteur propre de A toute matrice colonne X non nulle tel que $\{\exists X \in M_{1,n}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ AX = \lambda X\}$, on dit que λ est la valeur propre associé à X.

b) Il faut que 0 ne soit pas une valeur propre.

c) A admet n valeurs propres.

2) a) A est une matrice triangulaire inférieur, elle admet deux valeurs propre, $1/2$ et 1.

$$E_1(A) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad x, y \in \mathbb{R}^*$$

$$\begin{cases} 1/2\,x = x \\ 1/2\,x + y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1/2\,x = 0 \\ 1/2\,x = 0 \end{cases}$$

$E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ base car $\det\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$.

$$E_{1/2}(A) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} 1/2\,x = 1/2\,x \\ 1/2\,x + y = 1/2\,y \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 1/2\,x = -1/2\,y \Leftrightarrow x = -y \end{cases}$$

$E_{1/2}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. base car non nul.

b) 0 n'est pas une valeur propre donc A est inversible.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow 2L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) A possède 2 valeurs propres donc A est diagonalisable.

Soit $D = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, P est une matrice triangulaire donc inversible

et $A = PDP^{-1}$.

Partie II.

3) $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\Leftrightarrow \deg(P) \leq n-1$.

$F(P) = Q(X) = P(X) + \frac{1-X}{n} P'(X)$.

$\deg(P) \leq n-1$, $\deg P' \leq n-2$.

$\deg \frac{1-X}{n} P'(X) \leq n-1$.

$\deg \left(P(X) + \frac{1-X}{n} P'(X)\right) \leq n-1$

donc $Q(X) \in \mathbb{R}_{n-1}(X)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, H \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$F_n(\lambda P + H(X)) = \lambda P(X) + H(X) + \frac{1-X}{n} (\lambda P(X) + H(X))'$ ↓ par linéarité de la dérivée.

$= \lambda P(X) + H(X) + \frac{1-X}{n} \lambda P'(X) + \frac{1-X}{n} H'(X)$

$= \lambda \left[P(X) + \frac{1-X}{n} P'(X)\right] + H(X) + \frac{1-X}{n} H'(X)$

$= \lambda F_n(P) + F_n(H)$.

donc F_n linéaire, $F_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X])$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 741803

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 24 | Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

a) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(P_1, P_2, \dots, P_n) = (x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, \dots, x^2, x^1, x^0)$

Base libre car famille de degré étagés, $\dim B = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) $Q_n = F_n(P_n) = F_n(1)$

$= 1 + \frac{1-1}{n} \cdot (1)'$

$= 1$

c) $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$Q_k(x) = F_n(P_k(x)) = P_k(x) + \frac{1-x}{n} P_k'(x)$.

$P_k'(x) = (n-k) x^{n-k-1} = (n-k) x^{n-(k+1)} = (n-k) P_{k+1}(x)$.

d) $f_M(P_1) = Q_1(x) = \frac{1}{M} P_1(x) + \frac{M-1}{M} P_2(x)$.

$f_M(P_2) = Q_2(x) = \frac{2}{M} P_2(x) + \frac{M-2}{M} P_3(x)$.

⋮

$f_M(P_{M-1}) = \frac{M-1}{M} P_{M-1}(x) + \frac{1}{M} P_M$

$f_M(P_M) = Q_M = P_M$.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{M-1}{M} & \frac{2}{M} & & & \\ 0 & \frac{M-2}{M} & \frac{3}{M} & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \frac{M-1}{M} & 0 \\ & & \frac{1}{M} & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5) a) $F_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X])$.

Soit la base $(P_{M-1}, P_M) = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.

$F_2(P_{M-1}) = \frac{2-1}{2} P_{M-1}(x) + \frac{1}{2} P_{M-1} = \frac{1}{2} P_{M-1}(x) + \frac{1}{2} P_M(x)$.

$F_2(P_M) = P_M$

donc $mat_B(F_2) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} = A$.

$E_{1/2}(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_1(A) = Vect\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2a).

b) On cherche le polynome $S \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $F_2(S) = T$.

$T(x) = 2x + 1$

$S(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$F_2(S(x)) = ax + b + \frac{1-x}{2} a$.

$= ax + b + \frac{a - ax}{2}$

$= \frac{ax}{2} + \frac{2b+a}{2}$

$\begin{cases} \frac{a}{2} = 2 \\ \frac{2b+a}{2} = 1 \end{cases} \begin{cases} a = 4 \\ 2b + 4 = 2 \end{cases} \begin{cases} a = 4 \\ b + 2 = 1 \end{cases} \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$

$S(x) = 4x - 1$.

6) a) M_n est inversible, 0 n'est pas une valeur propre de M_n car c'est une matrice triangulaire au coefficient diagonaux non nul.

b) Les valeurs propres de M sont ses coefficients diagonaux on a donc $Sp(M_n) = \left\{ \frac{1}{k}, \forall k \in [\![1; n]\!] \right\}$.

c) M_n a n valeurs propre et appartient à $M_n(\mathbb{R})$ donc elle est diagonalisable.

d) On sait que $F_n(P_n) = P_n$

donc $P_n \in E_1(F_n)$

Or dim $E_1(F_n) = 1$ (car F_n a n valeurs propres)

donc $E_1(F_n) = \text{Vect}(P_n)$.

7) $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Soit $P \in E_1(F_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X] \setminus \{0\}$.

$$F_n\left(\frac{n-k}{n} P\right) = 1 \times \left(\frac{n-k}{n} P\right)$$

$$= \frac{n-k}{n} P$$

Tout polynôme appartenant à $E_1(F_n)$ multiplié par $\frac{n-k}{n}$ vérifie cette relation.

b) $E_1(F_n) = \text{Vect}(P_n) = \text{Vect}(1)$

$P(1) = 1$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)^\alpha R(x)$, $R(1) \neq 0$. $\alpha \in [\![1, n-1]\!]$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 741803

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 24 | Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

e) On a donc $P(x) = (x-1)^k a$

$F_M(P(x)) = \frac{M-k}{M} P(x)$.

donc $\forall k \in [\![1, M-1]\!]$, $P(x)$ appartient aux sous espaces propres définis par la valeur propre $\frac{M-k}{M}$.

Ainsi en $k=1$, $P(x) = (x-1).a$, $a \in \mathbb{R}$.

$F_M(P(x)) = \frac{M-1}{M} P(x)$.

et on peut écrire $E_{\frac{M-1}{M}}(F_M) = \text{Vect}(x-1)$.

Ainsi on a la base de vecteurs propres de F_M, $\left((x-1), (x-1)^2, (x-1)^3, \dots, (x-1)^{M-1}\right)$.

8) $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$V_k(x) = (x-1)^k$

a) $(V_0, V_1, \dots, V_{n-1}) = (1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, \dots, (x-1)^{n-1})$
famille libre car de degré étagés.

$(V_0, \dots, V_{n-1}) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\dim(V_0, \dots, V_{n-1}) = n$
$= \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
donc $(V_0, \dots, V_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$

$F_n^1 = F_n$, $F_n^{i+1} = F_n^i \circ F_n$.

$F_n^i(V_k) = \underbrace{F_n \circ F_n \circ \dots \circ F_n}_{i \text{ fois.}}(V_k)$

$= \underbrace{F_n \circ F_n \dots F_n}_{i-1 \text{ fois.}}\left(\frac{n-k}{n} V_k\right)$

$= F_n \circ F_n \circ \dots \circ \left(\frac{n-k}{n}\right) F(V_k)$.

Soit la proposition $\mathcal{J}_i$: "$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $F_n^i(V_k) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^i V_k$."

Initialisation
$i=1$, $F_n^1(V_k) = F(V_k) = \frac{n-k}{n} V_k$, $(\mathcal{J}_1)$.

Hérédité : Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $\mathcal{J}_i$ est vraie, on montre que $\mathcal{J}_{i+1}$ l'est aussi.

$F_n^{i+1}(V_k) = F_n^i \circ F_n(V_k) = F_n^i\left(F(V_k)\right) = F_n^i\left(\frac{n-k}{n} V_k\right)$

$= \frac{n-k}{n} f_n^i(v_k)$ · car $f_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.

$= \left(\frac{n-k}{n}\right)^{i+1} v_k$ (H.R)

J_{i+1} vrai, J_i héréditaire

Conclusion J_1 vrai, J_i héréditaire donc $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $f_n^i(v_k) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^i v_k$.

9) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $U_1(x) = x^{n-1}$

$U_1(x) = f_n(U_0)$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 741803

Emplacement QR Code

Code épreuve : 284 | Nombre de pages : 24 | Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie III :

B un événement.

10) Soit $(A_i)_{i\in[\![0,m]\!]}$ un système complet d'événements tel que $\sum_{i=0}^{m} P(A_i) = 1$

$$P(B) = \sum_{i=0}^{m} P(A_i \cap B)$$ d'après la formule des probabilités totales

11) Soit $j \in \mathbb{N}^*$

a) $k \in [\![1, m]\!]$, $k \leq j$.

$P(X_{j+1} = k \mid X_j = k)$ = la probabilité que la commande $j+1$ ait été passé dans le même magasin qu'une des autres j commandes.

Soit $\forall i \in [\![1, m]\!]$, l'événement A_i = "une commande est effectuée chez le i-ème marchand".

On sait que j commandes ont été effectuée, il faut donc pour que l'événement $[X_{j+1} = k \mid X_j = k]$ se réalise que le $k$ième marchand choisi soit identique à une des k autres commandes.

Ainsi la nouvelle commande passée est passé dans un des magasins parmis les k déjà choisis.

Alors $P(X_{j+1} = k \mid X_j = k)$ = au nombre de marchands déjà choisis sur le nombre de marchands total $\frac{k}{m}$.

car la probabilité de choisir le marchand i suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ de probabilité $\frac{1}{n}$.

b) $P(X_{j+1}=k \mid X_j = k-1)$ = la probabilité que la nouvelle commande au rang $j+1$ soit livré passé dans un nouveau site marchands soit dans un des $n-k+1$ marchands pas choisis.

donc $P(X_{j+1}=k \mid X_j=k-1) = \frac{n-k+1}{n}$ soit le nombre de marchands non choisis sur le nombre de marchands totaux.

de façon analogue à 11 a.

c) $k \in [\![1, n]\!]$, $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{k, k-1\}$

$P(X_{j+1}=k \mid X_j = i) = 0$ car il est impossible que la $j+1$ ème commande soit passé dans deux magasins différents ou que le nombre de magasin ayant reçu des commandes diminuent.

d) $(X_{j+1}=k \mid X_j=k)$, $(X_{j+1}=k \mid X_j=k-1)$, $(X_{j+1}=k \mid X_j=i)$ forment un s-c-e.

D'après la formule des probabilité totales:

$P(X_{j+1}=k) = P(X_{j+1}=k \mid X_j=k).P(X_{j+1}=k) + P(X_{j+1}=k \mid X_j=k-1).P(X_j=k-1)$
$+ P(X_{j+1}=k \mid X_j=i).P(X_j=i)$

$$P(X_{j+1}=k) = \frac{k}{n} P(X_j=k) + \frac{n-k+1}{n} P(X_j=k-1)$$

12) a) X_1 la V.A.R indiquant le nombre de nids ayant reçu une commande après qu'une commande ait été passée.
X_1 suit donc une loi certaine car il ne peut qu'y avoir un nid par la première commande tel que $P(X_1=1)=1$.

$$G_1 = \sum_{k=1}^{n} P(X_1=k)\, x^{n-k}$$

$$G_1 = P(X_1=1)\, x^{n-1} + 0 + 0 + \dots + 0$$
$$= x^{n-1}$$

b) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $G_{j+1}(x) = \sum_{k=1}^{n} P(X_{j+1}=k)\, x^{n-k}$

(11.d) $$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} P(X_j=k) + \frac{n-k+1}{n} P(X_j=k-1)\, x^{n-k}$$

$=$

c) On sait que M_n est inversible (6a) donc F_n admet une bijection sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Ainsi $\{\forall j \in \mathbb{N}^*, \exists! \alpha_j \in \mathbb{R}_{n-1}[X] / F(\alpha_j) = \alpha_{j+1}\}$.

On $G_j = F(G_{j-1})$ et $U_j = F(U_{j-1})$ (12b et définition de U).

Ainsi $G_j = U_j$.

d) $\forall j \in \mathbb{N}^*$,

$$G_{j+1}(x) = \sum_{k=1}^{n} P(X_{j+1} = k)\, x^{n-k}$$

$$=$$

e)

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751