NE RIEN ÉCRIRE

Examen ou concours : Série* :

Spécialité/option :

Repère de l' épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :
(Préciser, s'il y a lieu, le sujet choisi)

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuillets intercalaires dans le bon sens.

Note : 17/20

Appréciation du correcteur (uniquement s'il s'agit d'un examen) :

* Uniquement s'il s'agit d'un examen.

PROBLÈME A

(1) (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations usuelles.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{\frac{-1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x})}$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{x}}{x+1}$$

$$= \frac{\frac{x+1}{x} - 1}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{1}{x(x+1)^2}}$$

Donc $f'(x) \geq 0 \iff x > 0$, ce qui est vrai sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0}$

Donc on a le tableau de variations de f

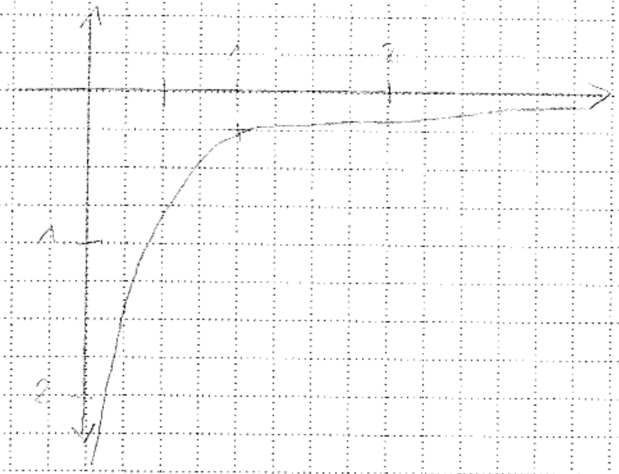
x	0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

(b) En 0, $f'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

En $+\infty$ $f'(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$

$f(1) = \frac{1}{2} - \ln(2) \approx 0,5 - 0,69 \approx -0,19$

donc on peut tracer la courbe de f :



(c) La limite de $x^2 f(x)$ étant indéterminée, on recourt aux développements limités.

$$x^2 f(x) = \frac{x^2}{x+1} - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

- d'une part $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$

or $\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$

donc $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ car $\frac{1}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

donc $\frac{x^2}{x+1} \underset{+\infty}{=} x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

- d'autre part,

$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

donc $x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + \left(\frac{1}{x}\right)$

donc $x^2 f(x) \underset{+\infty}{=} -1 + \frac{1}{2} + o(1) \underset{+\infty}{=} \boxed{-\frac{1}{2} + o(1)}$

donc $\boxed{x^2 f(x) \xrightarrow[+\infty]{} -\frac{1}{2}}$

(2) Pour tout $t \in [k, k+1]$ avec $k \geqslant 1$

on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

donc par positivité de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dt$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}}$$

(3) (a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$ par télescopage des termes.

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

En réutilisant les développements limités de (1)(c),

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\underset{+\infty}{=} \frac{-1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $\boxed{u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}}$

(b) D'une part,

$\forall k \geqslant 1$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$

donc par la relation de Chasles des intégrales, on somme :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

donc $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ donc $\boxed{\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant u_n}$

D'autre part, $\forall k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$$

donc on somme sur $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t}$$

c'est-à-dire en changeant d'indice :

$$\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t}$$

donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} + 1 - \frac{1}{n+1} = \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$

inutile

donc $\boxed{u_n \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} + 1}$

On a donc

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} + 1$$

Or $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \longrightarrow 0$

et $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} + 1 \longrightarrow 1$

Or comme $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$, la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. Étant minorée par 0, elle converge.

PROBLÈME B

Première partie

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B}$

(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{L_1+L_2}$ donc $\boxed{Rg(A) = 1}$

donc d'après le théorème du rang,

$\boxed{\dim \operatorname{Ker} A = 2 - \dim \operatorname{Im} A = 2 - Rg(A) = 2 - 1 = 1}$

(3) $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ donc $0 \in Sp(A)$.

Pour trouver une autre valeur propre, on étudie

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$A - \lambda I$ est non-inversible si et seulement si

$(-1-\lambda)(2-\lambda) + 2 = 0 \iff \lambda^2 - \lambda = 0 \iff \lambda(\lambda-1) = 0$
$\iff \lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

donc $\boxed{Sp(A) = \{0, 1\}}$

On détermine $\dim \operatorname{Ker}(A - I)$: $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$rg(A-I)=1$ donc $\dim \mathrm{Ker}(A-I)=1$

donc la somme des sous-espaces propres vaut n,

donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$

(4) $AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

donc $I_2 - AB = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

or $5\times5 - 4\times4 \neq 0$ donc $\boxed{I_2 - AB \text{ est inversible.}}$

De même, $A+B-AB = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

et $5\times5 - 8\times2 = 9 \neq 0$

donc $\boxed{A+B-AB \text{ est inversible}}$

Deuxième partie

(5) $\hat{u}\circ\hat{u} = (Id-u)\circ(Id-u)$

$= Id\circ Id - u\circ Id - u\circ Id + u\circ u$

$= Id - 2u + u = Id - u = \boxed{\hat{u}}$

donc $\boxed{\hat{u} \text{ est un projecteur}}$

(6) Soit $x \in \mathbb{R}^n$

On peut écrire $x = (x-u(x)) + u(x)$

· Montrons que $(x-u(x)) \in \mathrm{Ker}(u)$.

$u(x-u(x)) = u(x) - u^2(x) = u(x) - u(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

· Montrons que $u(x) \in \mathrm{Ker}(u-Id)$

$(u-Id)(u(x)) = u^2(x) - u(x) = u(x) - u(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Donc on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists y \in \mathrm{Ker}(u)$ et $\exists z \in \mathrm{Ker}(u-Id)$

tels que $x = y+z$

rien
rire
ans

la
artie
rrée

Donc $\boxed{\mathbb{R}^n = Ker(u) + Ker(u-Id)}$

- Montrons que $Ker(u)$ et $Ker(u-Id)$ sont <u>en somme directe</u> :

  soit $x \in Ker(u) \cap Ker(u-Id)$

  On aurait alors $u(x)=0$ et $(u-Id)(x)=0$
  $u(x) = x$

  donc $x=0$

  Donc $\boxed{Ker(u) \cap Ker(u-Id) = \{0\}}$

On a donc bien $\boxed{\mathbb{R}^n = Ker(u) \oplus Ker(u-Id)}$

(7) • On montre que $Ker(\hat{u}) = Im\,u$

→ On montre d'abord que $Ker(\hat{u}) \subset Im(u)$

Soit $x \in Ker(\hat{u})$.

Alors $(Id-u)(x)=0 \iff u(x)=x$

donc $x \in Im(x)$ donc $Ker(\hat{u}) \subset Im(u)$

→ On montre que $Im(u) \subset Ker(\hat{u})$

Soit $y \in Im(u)$. Alors $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tq $u(x)=y$

$\hat{u}(y) = (Id-u)(y) = y - u(y) = y - u^2(x)$

$= y - u(x) = 0$

Donc $y \in Ker(\hat{u})$

Donc on a bien la double inclusion : $\boxed{Ker(\hat{u}) = Im(u)}$

De même, on montre d'abord que $Ker(u) \subset Im(\hat{u})$

Soit $x \in Ker(u)$, alors $u(x)=0$
donc $(Id-u)(x) = x - 0 = x$
donc $x = \hat{u}(x)$

donc $Ker(u) \subset Im(\hat{u})$

et on montre que $Im(\hat{u}) \subset Ker(u)$

Soit $y \in Im(\hat{u})$ alors $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tq $\hat{u}(x)=y$

$u(y) = u \circ \hat{u}(x) = u \circ (Id-u)(x) = u(x) - u^2(x) = 0$

On a bien la double inclusion : $\boxed{Im(\hat{u}) = Ker(u)}$

ne rien écrire dans la partie barrée

N°

NE RIEN ÉCRIRE

Examen ou concours : Série* :

Spécialité/option :

Repère de l' épreuve :

Épreuve/sous-épreuve :
(Préciser, s'il y a lieu, le sujet choisi)

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles intercalaires dans le bon sens.

Note : /20

Appréciation du correcteur (uniquement s'il s'agit d'un examen) :

* Uniquement s'il s'agit d'un examen.

PROBLÈME C

Première partie

(1) $\forall c>0, \quad \dfrac{\ln(cx)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(c)+\ln(x)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(c)}{\ln(x)}+1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{1}$

donc ln est à variation lente.

(2) $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ ~~donc $\forall \varepsilon>0, \exists x_0 \in \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \forall x \geq x_0$~~

~~$\ell-\varepsilon \leq f(x) \leq \ell+\varepsilon$~~

de même, si $x \to +\infty$ alors $\forall c>0$, $cx \to +\infty$

donc $f(cx) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ par composition des limites.

~~donc $\forall \varepsilon>0, \quad \exists x_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ tq $\forall x \geq x_1 \quad \ell-\varepsilon \leq f(cx) \leq \ell+\varepsilon$~~

~~(Comme $\ell \neq 0$, on suppose ε tel que $f(x)\neq 0 \ \forall x \geq x_0$)~~

~~donc en posant $x_2 = \max(x_1, x_0)$, on peut écrire~~

Donc par opérations usuelles, en supposant $f(x)$ non nul à partir d'un certain rang*, on a :

* car sa limite ℓ est non nulle

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = \frac{\ell}{\ell} = 1}$$

Donc f est à variation lente.

(3) Soit f la fonction inverse, sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{cx}}{\frac{1}{x}} = c \neq 1 \quad \forall c \neq 1, c > 0$

$\boxed{\text{Il existe un contre-exemple donc fonction tendant vers 0 mais pas à variation lente}}$

Deuxième partie

(4) Calculons f' :

la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_2^x \frac{h(u)}{u} du$ est $x \mapsto \frac{h(x)}{x}$ $\forall x \geq 2$

donc la dérivée de f est :

$$f' : x \mapsto a \frac{h(x)}{x} \exp\left(\int_2^x \frac{h(u)}{u} du \right)$$

donc $\boxed{\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{x a \frac{h(x)}{x}}{a} = h(x) \quad \forall x \geq 2}$

(5) (a) On cherche donc h telle que

$$\forall x \geq 2, \quad h(x) = \frac{x \times \frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(x)}$$

donc d'après la question (4), on peut écrire :

$$\boxed{\forall x \geq 2, \quad \ln(x) = a \exp\left(\int_2^x \frac{1}{u \ln(u)} du \right)}$$

On a bien $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $h \in \mathcal{C}([2, +\infty[)$

(b) $h \in \mathcal{C}(]1, +\infty[)$ car $\ln(1) = 0$

Donc $x \mapsto a \exp\left(\int_2^x \frac{1}{u \ln u} du\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$

donc $\boxed{\text{on peut prolonger l'égalité pour } x \in]1, 2]}$

(6) (a) Soit $\varepsilon > 0$

On sait que h est continue sur $[2, +\infty[$

et que $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc par définition, $\exists M > 0$ tel que

$\forall x \geq M, \quad |h(x)| \leq \varepsilon$

On écrit donc :

$\forall x \geq 2, \int_2^x \frac{h(u)}{u} du = \int_2^M \frac{h(u)}{u} du + \int_M^x \frac{h(u)}{u} du$ par relation de Chasles

si $M \leq x$ Or $\forall u \in [M, x]$, $h(u) \leq \varepsilon$ (car $|h(u)| \leq \varepsilon$)

donc $\int_M^x \frac{h(u)}{u} \leq \int_M^x \frac{\varepsilon}{u} du = \varepsilon(\ln(x) - \ln(M))$

par positivité de l'intégrale

Donc $f(x) \leq a \exp\left(\int_2^M \frac{h(u)}{u} du + \varepsilon(\ln(x) - \ln(M))\right)$

$$\boxed{f(x) \leq \left(a \exp\left(\int_2^M \frac{h(u)}{u} du - \varepsilon \ln(M)\right)\right) x^{\varepsilon}} \boxed{= C x^{\varepsilon}}$$

(la relation trouvée n'est toutefois valable que pour $x \geq M$...)

Troisième partie

7. La fonction de répartition de X est continue, donc probablement $\mathcal{C}^1$ presque partout, donc X est à densité.

Donc $P(X \geq u) = 1 - P(X < u) = 1 - P(X \leq u)$

donc F est également continue.

(8)(a) $\bar{F}$ effectue une surjection de $\mathbb{R}^+$ dans $[0,1]$, donc

pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \in [0,1]$

donc $\boxed{\text{il existe } a_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \bar{F}(a_n) = \frac{1}{n}.}$

(b) Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$,

alors $P(X \geq x) = e^{-\lambda x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

donc $e^{-\lambda a_n} = \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow -\lambda a_n = \ln(\frac{1}{n})$

$\Leftrightarrow \boxed{a_n = \frac{-\ln(\frac{1}{n})}{\lambda}}$

(c) D'après l'inégalité de Markov, on a pour tout $a_n \in \mathbb{R}^{+*}$,

$P(X \geq a_n) \leq \frac{E(X)}{a_n}$

donc $\frac{1}{n} \leq \frac{E(X)}{a_n}$

donc $\boxed{E(X) \geq \frac{a_n}{n}}$

(d) Si $a_n/n \longrightarrow +\infty$, alors par encadrement

$E(X) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ (absurde)

donc $E(X)$ n'est pas une espérance.