Copie anonyme - n°anonymat : 780819

z2-00040
780819
maths (E)

Filière : B/L

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème A

Premier jeu :

1. Pour $i \geq 1$

on a $X_i(\Omega) = \{11, -10\}$

La pièce étant équilibrée, on a $P(X_i = 11) = \frac{1}{2}$ et $P(X_i = -10) = 1/2$

donc $E[X_i] = 11 \times P(X_i = 11) - 10 \times P(X_i = -10)$

$= \frac{11}{2} - \frac{10}{2}$

$= +\frac{1}{2}$

l'espérance de X_i est $\underline{E[X_i] = +\frac{1}{2}}$

2.a. A chaque lancé n, on ajoute à S_{n-1} la valeur de X_n, pour $n \geq 1$ et $i \geq 1$

d'où $S_n = S_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$\underline{S_n = 100 + \sum_{i=1}^{n} X_i}$

2.b. Comme pour tout $i \geq 1$, $X_i(\Omega) = \{11, -10\}$, on a : ~~$S_2$~~
$S_2 = 100 + X_1 + X_2$, donc

* si $k = 122$, $P(S_2 = k) = P(X_1 = 11 \cap X_2 = 11)$
$= P(X_1 = 11) \times P(X_2 = 11)$ car X_1 et X_2 indépendants car la pièce est équilibrée
$= 1/2 \times 1/2$
$= 1/4$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

* si $k = 101$, $P(S_2 = k) = P(X_1 = 11 \cap X_2 = -10) + P(X_1 = -10 \cap X_2 = 11)$

$= P(X_1 = 11) \times P(X_2 = -10) + P(X_1 = -10) \times P(X_2 = 11)$ par indépendance

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2}$

* si $k = 80$, ~~$P(S_2 = k) = P(X_1 = -10 \cap X_2$~~

$P(S_2 = k) = P(X_1 = -10 \cap X_2 = -10)$

$= P(X_1 = -10) \times P(X_2 = -10)$

$= \frac{1}{4}$

* si $k \notin \{122, 101, 80\}$, $(S_2 = k)$ ~~$= \emptyset$~~ est un évènement impossible, donc

$P(S_2 = k) = 0$

donc $P(S_2 = k) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } k = 122 \\ 1/2 & \text{si } k = 101 \\ 1/4 & \text{si } k = 80 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2.c. pour $n \geqslant 0$, on a

$S_n = 100 + \sum_{i=1}^{n} X_i$ d'après 2.a.

sachant que si $n = 0$, $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$

on a alors $E[S_n] = E\left[100 + \sum_{i=1}^{n} X_i\right]$

$= 100 + E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$ par linéarité de l'espérance

$= 100 + \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$ par linéarité de l'espérance

$= 100 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}$ d'après 1.

$= 100 + \frac{n}{2}$

on a alors $E[S_n] = \underline{100 + \frac{n}{2}}$

3.a. d'après 2.c., on a $E[S_{10}] = 100 + \frac{10}{2} = 105 > 0$

de plus, $\min(S_{10}) = 100 - 10 \times 10 = 0$

donc $S_{10} \geq 0$

d'après l'inégalité de Markov,

$$P(S_{10} \geq 160) \leq \frac{E[S_{10}]}{160} = \frac{105}{160} = \frac{21}{32}$$

on admet que $\frac{21}{32} \leq \frac{2}{3}$

donc $\underline{P(S_{10} \geq 160) \leq \frac{2}{3}}$

3.b. on admet ce résultat

4.a. Comme $S_1 = 100 + X_1$, $S_1(\Omega) = \{90 ; 111\}$

ainsi, $P(T=1) = P(S_1 \leq 89 \cup S_1 \geq 105)$

$= P(S_1 = 111)$

$= P(X_1 = 11)$

$= 1/2$

donc $\underline{P(T=1) = \frac{1}{2}}$

~~4.b. de même,~~ $\cancel{S_2(\Omega) = \{80, 101, 122\}}$

* ~~donc~~ $\cancel{P(T=2) = P(S_2 \leq 89 \cup S_2 \geq 105)}$

$\cancel{= P(S_2 = 80) + P(S_2 = 122)}$

$\cancel{= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$ ~~d'après 4.a.~~

$\cancel{= \frac{1}{2}}$

$\cancel{P(T=2) = 1/2}$

4.c. comme $S_2(\Omega) = \{80, 101, 122\}$,

si $T \geq 3$, alors $S_2 \in \,]89 ; 105[$ donc $\underline{S_2 = 101}$

$\ast$ 4. b. comme $S_1(\Omega) = \{90, 111\}$ et $S_2 = \{80, 101, 122\}$,

si $S_1 = 111$, $T=1$ si $S_2 = 101$, $T \geqslant 2$

d'où $P(T=2) = P(S_1 = -10 \cap (S_2 = 80 \cup S_2 = 122))$

$= P(S_1 = -10) \times (P(S_2 = 80) + P(S_2 = 122))$ par indépendance

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{1}{4}$

donc $\underline{P(T=2) = \frac{1}{4}}$

4. d.

4. e.

5. On a $Y_i(\Omega) = \{1{,}11 ; 0{,}9)$ pour $i \geqslant 1$

La pièce étant équilibrée, on a :

$E[Y_i] = 1{,}11 \times P(Y_i = 1{,}11) + 0{,}9 \times P(Y_i = 0{,}9)$

$= \frac{1{,}11}{2} + \frac{0{,}9}{2}$

$= \frac{2{,}01}{2}$

Copie anonyme - n°anonymat : 780819

6.a. Soit $\pi_0 = 100$. Pour $n \geq 1$ et $i \geq 1$, on a

$$\pi_n = 100 \times \prod_{i=1}^{n} Y_i$$

6.b. pour $n \geq 0$, on a

$$E[\pi_n] = E[100 \times \prod_{i=1}^{n} Y_i] \quad \text{d'après 6.a.}$$

$$= 100\, E[\prod_{i=1}^{n} Y_i] \quad \text{par linéarité de l'espérance}$$

$$= 100 \times \prod_{i=1}^{n} E[Y_i] \quad \text{car les } Y_i \text{ sont supposés indépendants}$$

$$= 100 \times \prod_{i=1}^{n} \frac{2{,}01}{2}$$

$$= 100 \times \left(\frac{2{,}01}{2}\right)^n$$

7.a. Soit $\alpha = -E[\ln(Y_1)]$

Posons $k_1 = 1{,}11$ et $k_2 = 0{,}9$

par le théorème du transfert, $E[\ln(Y_1)] = \sum_{i=1}^{2} \ln(k_i) P(Y_1 = k_i)$

$$= \ln(0{,}9) \times \tfrac{1}{2} + \ln(1{,}11) \times \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\ln(0{,}9) + \ln(1{,}11))$$

~~or $\ln(0{,}9) \times 1/2 < 0$ et $\ln(1{,}11) \times 1/2 > 0$~~

$$= \tfrac{1}{2}(\ln(0{,}9 \times 1{,}11))$$

Or, on admet que $(0{,}9 \times 1{,}11) < 1$

donc $\tfrac{1}{2} \ln(0{,}9 \times 1{,}11) < 0$

donc $\alpha > 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7. b. On admet ce résultat

8. a. Comme $\alpha > 0$, $e^{-\frac{\alpha}{2}n} \leq 1$ donc $100\, e^{-\frac{\alpha}{2}n} \leq 100$ pour tout $n \geq 0$

Or d'après 7. b., $P(\Pi_n \leq 100\, e^{-\frac{\alpha}{2}n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

donc, ~~la probabilité de~~ perdre de l'argent par rapport au montant initial est presque certaine. Le jeu semble donc paradoxal : plus on joue, plus on perd

8. b. En revanche, d'après 3. b, $P(S_n \geq 100 + \frac{n}{4}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

et $n \geq 0$

Ainsi, dans le premier jeu, ~~la probabilité de~~ gagner de l'argent est presque certaine.

Il est donc préférable de jouer au premier jeu

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-02-PF 019 711

Copie anonyme - n°anonymat : 780819

Filière : B/L	Session : 2022
Épreuve de : Mathématiques	

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème B.

9.a. On a $A = (0;-1)$, $M = (x,0)$ et $B = (b,1)$

La ~~distance~~ longueur de $[AM]$ est $\sqrt{(x-0)^2+(0+1)^2} = \sqrt{x^2+1}$

la ~~longueur~~ longueur de $[MB]$ est $\sqrt{(b-x)^2+(1-0)^2} = \sqrt{1+(x-b)^2}$

9.b. comme $\sqrt{1+x^2}$ est la longueur de $[AM]$ et $\sqrt{1+(x-b)^2}$ est la longueur de $[MB]$,

$L(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x-b)^2}$ est la somme des longueurs $[AM]$ et $[MB]$

10.a. On cherche α et $\beta \in \mathbb{R}$, tels que A et B appartiennent à la droite d'équation $d(x) = \alpha x + \beta$;

soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \alpha 0 + \beta = -1 \\ \alpha b + \beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha b = 2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = \frac{2}{b} \end{cases}$ car $b > 0$

la droite a pour équation $d(x) = \frac{2}{b}x - 1$

10.b. I étant le point d'intersection entre $[AB]$ et l'axe des abscisses, il a pour coordonnées $(x_I, 0)$

avec $x_I \in \mathbb{R}$ tel que $d(x_I) = 0$

or $d(x_I) = 0 \iff \frac{2}{b}x_I - 1 = 0$

$\iff \frac{2}{b}x_I = 1$

$\iff x_I = \frac{b}{2}$ donc $I = (\frac{b}{2}, 0)$

11. d'après l'inégalité triangulaire, on a

$|AB| \leq |AM + MB|$ avec $|AB|$ la ~~longueur~~ longueur de AB
et $|AM+MB|$ la longueur de $AM + MB$

ainsi, $\min |AM+MB| = |AB|$

donc il faut que M soit le point d'intersection entre $[AB]$ et l'axe des abscisses

donc, il faut que $\underline{M = I = \left(\frac{b}{2}, 0\right)}$

12.a. on a $V \neq 0$, $1+x^2 > 0$ et $1+(x-b)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

donc $\sqrt{1+x^2}$ et $\sqrt{1+(x-b)^2}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions usuelles dérivables,

d'où <u>T est dérivable sur $\mathbb{R}$</u> en tant que combinaison de fonctions dérivables.

12.b. T étant dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après 12.a, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T'(x) = \frac{1}{V} \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{2x-2b}{2\sqrt{1+(x-b)^2}}$$

d'où $\underline{T'(x) = \frac{1}{V} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x-b}{\sqrt{1+(x-b)^2}}}$

12.c. on a $T''(x) = \frac{1}{V(1+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+(x-b)^2)^{3/2}}$, $x \in \mathbb{R}$

or, $V > 0$, $1+x^2 > 0$ et $1+(x-b)^2 > 0$

donc $\frac{1}{V(1+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+(x-b)^2)^{3/2}} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d'où, par le théorème fondamental de l'analyse,

<u>T' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$</u>

12.d. comme $1+x^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ et que $1+(x-l)^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$,

T' est continue sur $\mathbb{R}$

de plus, T' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc, d'après le théorème de la bijection, T' effectue une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle $I =$ ~~$\mathbb{R}$~~ $\left]\lim_{x\to-\infty} T'(x), \lim_{x\to+\infty} T'(x)\right[$,

en admettant que $\lim_{x\to-\infty} T'(x) < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} T'(x) > 0$

ainsi, T' étant une bijection, il existe un unique point $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $T'(x_0)=0$

12.e. on a :

$T'(0) = \dfrac{-l}{\sqrt{1+l^2}} \leqslant 0$ car $l > 0$ et $\sqrt{1+l^2} > 0$

$T'(l) = \dfrac{1}{V} \times \dfrac{l}{\sqrt{1+l^2}} \geqslant 0$ car $V > 0$, $l > 0$ et $\sqrt{1+l^2} > 0$

ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $T'(0) \leq 0$ et $T'(l) \geq 0$, si $T'(x_0)=0$, alors $x_0 \in [0, l]$

13.a. on a, pour tout $V > 0$,

$0 \leq x_0(V) \leq l$ d'après 12. e.

$\iff 0 \leq x_0(V)^2 \leq l^2$ par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$

$\iff 1 \leq 1+x_0(V)^2 \leq 1+l^2$

$\iff 1 \leq \sqrt{1+x_0(V)^2} \leq \sqrt{1+l^2}$ par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$

13.b. on admet ce résultat

13. c.

On a d'après 13. b,

$x_0(V) \leq V\, b \sqrt{1+b^2}$

or on a également $0 \leq x_0(V)$

comme b est fixé, $V\, b\sqrt{1+b^2} \xrightarrow[V \to 0]{} 0$

donc par le théorème des gendarmes, $x_0(V)$ admet une limite et $x_0(V) \xrightarrow[V\to 0]{} 0$

13. d.

14. a. ~~x_0 est dérivable en 0 si, et seulement si~~

~~la limite de~~ $\cancel{\dfrac{x_0(V) - x_0(0)}{V - 0}}$ ~~quand V tend vers 0 existe~~

~~or~~ $\cancel{\dfrac{x_0(V) - x_0(0)}{V}}$

x_0 est dérivable si la limite de $\dfrac{x_0(V) - x_0(0)}{V}$ existe quand $V \to 0$

Il s'agit donc de lever l'indétermination de cette limite.

Copie anonyme - n°anonymat : 780819

Filière : BJL

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Problème C

15.a. soit $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. notons $g_{i,j}$ ses ~~coordonnées~~ coefficients

G vérifie $O \iff C_i^T C_j = 0, \forall i \neq j$ avec $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de G

or, $C_i^T C_j = \sum_{k=1}^{3} g_{k,i}\, g_{k,j}$

si $i=1, j=2$, $C_1^T C_2 = 0$

si $i=2, j=3$, $C_2^T C_3 = 0$

si $i=1, j=3$, $C_1^T C_3 = 1-1=0$

donc G vérifie la propriété O

G vérifie $I \iff G^T G = I_3$

or $G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

et $G^T G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq I_3$

donc G ne vérifie pas la propriété I

15. b. Soit $M \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$M \in \ker(G) \iff GM = 0$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\iff \begin{cases} x+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ x = -x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow M = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\ker(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$

15. c. On admet ce résultat

15. d. Les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont les valeurs λ pour lesquels $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est non inversible.

Or $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

comme cette matrice est de dimension 2, elle est non inversible si son déterminant est nul

$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \lambda^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$

la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a donc pour valeur propre 0

15. e. On sait d'après 15. d. que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a pour unique valeur propre 0

d'après 15. c. cette valeur propre est aussi l'unique valeur propre de G

ainsi, l'espace propre $E_0(G) = \ker(G)$ est de dimension 1 d'après 15. b.

or ~~$1 \neq 3 = n$~~ $1 \neq \dim M_3(\mathbb{R}) = 9$

donc la matrice G n'est pas diagonalisable

16. Notons $m_{i,j} = (M)_{i,j}$ avec $1 \leq i,j \leq n$

on a $(M^T M)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (M^T)_{i,k} (M)_{k,j}$ par définition du produit matriciel

$= \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j}$ par définition de la transposée

$= C_i^T C_j$ car $\sum_{k=1}^{n} m_{k,i} = C_i$ et $\sum_{k=1}^{n} m_{k,j} = C_j$

d'où $(M^T M)_{i,j} = C_i^T C_j$

17. Soit M vérifiant ①

17. a. $M^T M$ est diagonale $\Longleftrightarrow (M^T M)_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$

$\Longleftrightarrow C_i^T C_j = 0$ pour tout $i \neq j$ d'après 16.

or, si M vérifie ①, alors pour tout $i \neq j$, $C_i^T C_j = 0$

donc $M^T M$ est diagonale

17. b. ~~si~~ les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls si, et seulement si

$(M^T M)_{i,i} \geq 0 \Longleftrightarrow C_i^T C_i \geq 0$

$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,i} \geq 0$

$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (m_{k,i})^2 \geq 0$

or $(m_{k,i})^2 \geq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

d'où $\sum_{k=1}^{n} (m_{k,i})^2 \geq 0$ donc les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls

17. c. d'après 17. b., la matrice $(M^T M)$ est diagonale

donc si $i \neq j$, $(M^T M)_{i,j} = 0$

donc si $(M^T M)_{jj} = 0$, alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(M^T M)_{i,j} = 0$

donc $C_j = 0$

17. d.

18. soit M vérifiant la propriété I

18. a. on a donc $M^T M = I_n$

donc M est inversible d'inverse M^T

18. b. P vérifie aussi I, $P \in M_n(\mathbb{R})$

on a $(P^T M P)^T . P^T M P = P^T M^T P P^T M P$

$= P^T M^T M P$ car $P^T P = I_n$

$= P^T P$ car $M^T M = I_n$

$= I_n$

donc $P^T M P$ vérifie aussi I

19. a. On remarque que $\left(A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right)^T = z$

on a $\|z\| = 0 \iff \sqrt{\langle z, z \rangle} = 0$

$\iff \langle z, z \rangle = 0$

$\iff z = 0$

$\iff \left(A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right)^T = 0$

$\iff A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$ donc $\|z\| = 0 \iff A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Copie anonyme - n°anonymat : 780819

Filière : B/L

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

19.b on a :

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x_3\\-x_2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_3\\0\\x_1\end{pmatrix}$$

19.c. comme $x_3 \neq 0$, on a $\begin{pmatrix}0\\x_3\\-x_2\end{pmatrix} \neq 0$ et $\begin{pmatrix}-x_3\\0\\x_1\end{pmatrix} \neq 0$

donc $\begin{pmatrix}0\\x_3\\-x_2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-x_3\\0\\x_1\end{pmatrix}$ sont clairement non colinéaires (car $x_3 \neq 0$) et appartient à l'image de u, l'application linéaire représentée par A

ainsi, $\dim \mathrm{Im}(u) \geq 2$

or, par le théorème du rang,

$$3 = \dim \mathrm{Im}(u) + \dim \ker(u)$$

$$\Leftrightarrow \dim \ker(u) = 3 - \dim \mathrm{Im}(u)$$

$$\Leftrightarrow \dim \ker(u) \leq 1$$

20.a. on admet ces résultats

20.b. on a d'après 20.a, $\langle x+y, z\rangle = 0$ et $\langle x-y, z\rangle = 0$

de plus, $\langle (x+y), (x-y)\rangle = x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 - y_3^2$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

$$= \|x\|^2 - \|y\|^2$$

$$= 0 \quad \text{car } x \text{ et } y \text{ ont la même norme.}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc la famille $(x+y, x-y, z)$ est orthogonale donc libre

et son cardinal est de $3 = \dim \mathbb{R}^3$

donc $(x+y, x-y, z)$ est une base de $\mathbb{R}^3$