Copie anonyme - n°anonymat : 124654

A3-00013
124654
maths (E)

Filière : B/L

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercices :

I. (1) (1a) $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$v_{n+1} = x_{n+1} - \frac{2\alpha+\beta}{3} = \frac{y_n+\alpha}{2} - \frac{2\alpha+\beta}{3}$$
$$= \frac{1}{2}\left(y_n + \alpha - \frac{4\alpha}{3} - \frac{2\beta}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(y_n - \frac{\alpha+2\beta}{3}\right) = \frac{1}{2} w_n$$

De même, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = y_{n+1} - \frac{\alpha+2\beta}{3} = \frac{x_n+\beta}{2} - \frac{\alpha+2\beta}{3}$$
$$= \frac{1}{2}\left(x_n + \beta - \frac{4\beta}{3} - \frac{2\alpha}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{2\alpha+\beta}{3}\right) = \frac{1}{2} v_n$$

Donc, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} v_{n+1} = \frac{1}{2} w_n \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \end{cases}$

(1b) On déduit de (1a) que :

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n w_0 \\ w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n^2 + w_n^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^n w_0^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^n v_0^2$

$$= \frac{w_0^2 + v_0^2}{4^n}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(1c) On a $v_n^2 + w_n^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après (1b)

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n^2 \geq 0$ et $w_n^2 \geq 0$

Donc, $v_n^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\underline{v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$ de même $\underline{w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$

(1d) On a donc que : $\begin{cases} x_n - \dfrac{2\alpha + \beta}{3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ y_n - \dfrac{\alpha + 2\beta}{3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

Donc, on peut en déduire que,

$$\underline{x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{2\alpha + \beta}{3}, \quad y_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha + 2\beta}{3}}$$

II. (2) (2a) f est définie $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0 \end{cases}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

Donc $\underline{D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}}$

(2b) Par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\langle (x,y), (1,1) \rangle \leq \|(x,y)\| \, \|(1,1)\|$

$\Leftrightarrow$ $\underline{x + y \leq \sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{2}}$

(2c) On a $f(a,a) = \dfrac{2a}{\sqrt{a^2+a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{2a^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Or d'après (2b), $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} : f(x,y) \leq \sqrt{2}$ donc $f(a,a)$ est un maximum de f, donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,a) = 0}$

(3) (3a) $f(x,y) = \dfrac{r(\cos\theta + \sin\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{\cos(\theta)+\sin(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}}$

car $r > 0$ donc $\sqrt{r^2} = |r| = r$

(3b) On a : $f(x,y) = f\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$. La fonction conserve les angles.

~~La fonction f renvoie donc l'angle qu'il y a entre~~
~~(x,y) et l'axe des abscisses~~

Problème A :

A.1. Protocole A.

(4) (4a) Si le premier résultat est négatif aucun des individus testés n'a la propriété, il n'est alors pas nécessaire de tous les tester individuellement.

(4b) A_n vaut soit 1 (premier test négatif)
soit $n+1$ (premier test positif, puis test des individus).

Donc $\begin{cases} A_n = 1 \\ \text{ou} \\ A_n = n+1 \end{cases}$

(4c) On note I_i = "l'individu numéro i est négatif"

$P(A_n = 1) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} I_i\right) \underset{\uparrow}{=} \prod_{i=1}^{n} P(I_i) = q^n.$

indépendance (H)

de plus $P(A_n = n+1) = 1 - P(A_n = 1) = 1 - q^n$.

Donc $\begin{cases} P(A_n = 1) = q^n \\ P(A_n = n+1) = 1 - q^n \end{cases}$

(4d) $E(A_n) = 1 \times q^n + (n+1)(1-q^n)$ (car $E(A_n) = 1 \times P(A_n = 1) + (n+1) \times P(A_n = n+1)$)

$$= q^n - q^n - nq^n + n + 1$$
$$= n+1 - nq^n$$

On a bien $E(A_n) = n+1 - nq^n$

(5) En reprenant nos notations :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{I_k} \mid A_n = n+1\right) = \frac{P\left(\left\{\bigcap_{i=1}^{k} \overline{I_k}\right\} \cap \{A_n = n+1\}\right)}{P(A_n = n+1)}$$

$$= \frac{P\left(\left\{\bigcap_{i=1}^{k} \overline{I_k}\right\} \cap \left\{\bigcup_{i=k+1}^{n} I_i\right\}\right)}{1-q^n}$$ → car au moins une personne est positive parmi celles restantes

$$= \frac{q^k \times P\left(\bigcup_{i=k+1}^{n} I_i\right)}{1-q^n}$$

$$\boxed{= \frac{q^k \times (n-k-1)(1-q)}{1-q^n}}$$

Protocole B.

(6) (6a) La question revient à savoir quand est-ce que l'inégalité suivante est vérifiée : $E(A_n) \leq n$, en fonction de q.

$$\Leftrightarrow nq^n \geq 1.$$
$$\Leftrightarrow q \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \quad (\in [0;1], \text{ car } \frac{1}{n} \in [0;1]).$$

On fait donc en moyenne moins de tests avec le protocole A quand $q \in \left[\sqrt[n]{\frac{1}{n}}, 1\right]$

Copie anonyme - n°anonymat : 124654

Emplacement QR Code

Filière : B/L

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

(6). (6b) On pose $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^x. \end{array}$

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \; f(x) = e^{x\ln(x)}$ or en 0 $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ (Forme indéterminée usuelle)

Donc $\underline{f(x) \underset{0^+}{\longrightarrow} 1.}$

(6c) En posant $N = \frac{1}{n}$ on a $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = N^N$

Or, $n \to +\infty \Rightarrow N \to 0$, donc d'après (6b) $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$.

Or, ici, q est fixe, donc à un moment, puisque l'intervalle $[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} ; 1]$ se réduit quand n tend vers $+\infty$, on aura $q < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ et donc $E(A) \geq n$.

<u>Pour n assez grand, le protocole B est préférable.</u>

A.2. Protocole C.

(7) (7a) $\underline{C \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$ car on a des expériences identiques et indépendantes.

(7b) $\underline{E(C) = \frac{1}{p}}$

(8) (8a) $\{G > k\} \Leftrightarrow \{C > n(k+1)\}$

↳ car les n personnes ~~des k~~ dans chacun des $1+k$ premiers groupes sont négatives.

(8b) $P(G>k) = P(C > n(k+1))$ (d'après (8a)).

$= q^{n(k+1)}$ Donc $P(G>k) = q^{n(k+1)}$

(8c) Si une personne dans le groupe $k+2$ est positive alors $G = k+1$.

Donc, $G \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q^n)$.

(9) (9a) $X \in [\![0, n]\!]$

↳ $X=0$ si aucune des personnes du groupe n'est positive.
Si on est sûr que dans le groupe quelqu'un est positif on a $X \in [\![1, n]\!]$

(9b) $P(X=i \mid G=k) = q^{i-1}p$.

(9c) si $q \to 1$. $P(X=i \mid G=k) = q^{i-1}(1-q)$

$= q^{i-1} - q^i \underset{q \to 1}{\longrightarrow} 0$

Donc $P(X=i \mid G=k) \underset{q \to 1}{\longrightarrow} 0$

(9d) Soit $i \in [\![1, n]\!]$

$P(X=i) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=i \cap G=k)$ ($[G=k]_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un SCE)

$= q^{i-1}p \sum_{k=1}^{+\infty} P(G=k) = P(X=i \mid G=k)$ donc

Comme i est quelconque. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$P(X=i) = P(X=i \mid G=k)$ donc X et G sont indépendantes

(9e) $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k)$

$= \sum_{k=1}^{n} k\, q^{k-1} p$

$= \sum_{k=1}^{n} k\, q^{k-1} (1-q)$

$= \sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k q^{k}$

$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) q^{k} - \sum_{k=1}^{n} k q^{k}$

$= \sum_{k=0}^{n-1} q^{k} + \sum_{k=0}^{n-1} k q^{k} - \sum_{k=1}^{n} k q^{k}$

$\underset{\text{télescopage}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} - n q^n = \frac{1-q^n - (1-q) n q^n}{(1-q)}$

$= \frac{1-q^n - nq^n + nq^{n+1}}{1-q}$

$= \frac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)}$

Il me manque $\frac{1}{(1-q)^n}$ au dénominateur, échec

(10) (10a) $\{D=3\} \Leftrightarrow \{G=2 \wedge X=1\} \cup \{G=1 \wedge X=2\}$

(10b) $D = G + X$

(10c) $P(D=j) = P(G+X=j) = \sum_{k=1}^{+\infty} (P(G+X=j \wedge G=k)$.

$= \sum_{k=1}^{j-1} P(X=j-k \wedge G=k) + 0$

si $G \geq j$ alors $X \leq 0$ → impossible.

Or $G=k \wedge X=j-k \Leftrightarrow C = n(k-1) + j-k$ → la j-k ème du groupe k l'est.

$k-1$ toutes les personnes des premiers groupes négatives

Donc On a bien $P(D=j) = \sum_{k=1}^{j-1} P(C=(k-1)n+j-k)$ pour $j \geq 1$

(II) (11 a) $E(D) = \sum_{j=2}^{+\infty} j \sum_{k=1}^{j-1} P(C=(k-1)n+j-k)$

car $X \geq 1, G \geq 1 \Rightarrow j = 2$

$$= \sum_{j=2}^{+\infty} j \sum_{k=1}^{j-1} q^{(k-1)n+j-k-1} p$$

$$= \sum_{j=2}^{+\infty} j \sum_{k=1}^{j-1} q^j q^{-n-1} (q^{n-1})^k p$$

$$= p q^{-(n+1)} \sum_{j=2}^{+\infty} j q^j q^{n-1} \times \frac{1-(q^{n-1})^j}{1-q^{n-1}}$$

$$= \frac{(1-q)q^{-2}}{1-q^{n-1}} \left(\sum_{j=2}^{+\infty} j q^j - \sum_{j=2}^{+\infty} j (q^n)^j \right)$$

$$= \frac{(1-q)q^{-2}}{1-q^{n-1}} \left[q \left(\sum_{j=1}^{+\infty} j q^j - q \right) - q^n \left(\sum_{k=1}^{+\infty} j (q^n)^{j-1} - q^n \right) \right.$$

$$E(D) = E(G) + E(X)$$

$$= \frac{1}{1-q^n} + \frac{1-(n+1)q^n + n q^{n+1}}{(1-q)(1-q^n)} \quad \text{(on admet I9e))}$$

$$= \frac{1-q+1-(n+1)q^n + n q^{n+1}}{(1-q)(1-q^n)}$$

(11 b) $$\frac{E(D)}{E(C)} = \frac{\overset{\to 0}{\overbrace{1-q}} + \overset{\to -n+1}{\overbrace{1-(n+1)q^n}} + \overset{\to n}{\overbrace{n q^{n+1}}}}{\underset{\to 0}{\underbrace{(1-q^n)}}}$$

On a une Forme indéterminée "$\frac{0}{0}$" échec

On suppose néanmoins que $\frac{E(D)}{E(C)} \to 0$ car

$\approx$ le protocole D est plus efficace si

$q \to 1$. donc on aurait $E(D) \underset{1}{=} o(E(C))$.

Copie anonyme - n°anonymat : 124654

Emplacement QR Code

Filière : B/L

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème B :

(12) (12a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{x} + e^{-x} > 0$

donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$

(12b) $D_f = \mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$.

de plus $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{x}} = f(x)$, donc f est paire

(12c) f est dérivable par opérations usuelles sur des fonctions ~~def~~ dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{(e^{x} + e^{-x})^2}$

(12d) Pour $x \in]-\infty ; 0[\quad \underbrace{e^{-x}}_{e^{-0}} - \underbrace{e^{x}}_{e^{0}} > 1 - 1 = 0$ donc

$\forall x \in]-\infty ; 0[\quad f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$

(12e) $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{e^{x} + e^{-x}} \to 0$ donc $\lim_{+\infty} f(x) = 0$

$\underbrace{e^{x}}_{\to +\infty \text{ si } x \to +\infty} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0 \text{ si } x \to +\infty}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(13) (13a) Si $u = e^x$:

i. $du = e^x dx$

ii $\frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{e^x}{(e^x)^2+1} dx = \frac{1}{u^2+1} du$

car $f(x) = \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}}$

iii. $M \to e^M$, $0 \to 1 \ (e^0)$.

Donc On a bien : $\int_0^M f(x)\,dx = \int_1^{e^M} \frac{1}{1+u^2}\,du$

(13b) f est paire donc si $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

Mq $\int^{+\infty} f$ converge (symétrique pour $-\infty$).

On a $\forall \alpha > 1 \quad \frac{x^\alpha}{e^x + e^{-x}} \underset{+\infty}{\to} 0$ (forme indéterminée usuelle).

donc $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ or par Riemann $\int^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ converge,

tout est positif, donc par comparaison $\int^{+\infty} f(x)$ converge, de même pour $\int_{-\infty} f$.

Donc on a bien $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

$I_M = 2\int_0^M f(x)\,dx = 2\int_1^{e^M} \frac{1}{u^2+1}\,du = 2\left[\arctan u\right]_1^{e^M}$

$= 2\left(\arctan e^M - \frac{\pi}{4}\right)$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

(13 c) $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{x} + e^{-x} \geq 1$ (car soit $e^{x} \geq e^{0}$, soit $e^{-x} \geq e^{0}$).

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$ $|e^{x} - e^{-x}| \leq |e^{x} + e^{-x}|$ (car e^{-x} est positif).

$\Leftrightarrow |e^{x} - e^{-x}| \leq (e^{x} + e^{-x})^{2}$ (car $e^{x} + e^{-x} \geq 1$).

$\Leftrightarrow |f'(x)| \leq 1.$

Donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f'(x) \leq 1}$

(13 d) $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f'(x)| \leq 1$, en appliquant l'IAF, on a :

$\underline{\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|}$

(14) (14 a) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy$ converge donc $\int_{-\infty} g(y)dy$ converge, de même pour $\lim\limits_{y \to -\infty} g(y)$ (sinon l'intégrale diverge)

Pareil en $+\infty$. Donc $\underline{\begin{cases} g(y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} l \in \mathbb{R} \\ g(y) \xrightarrow[y \to -\infty]{} l' \in \mathbb{R} \end{cases}}$

(14 b) De même, pour que l'intégrale converge, il faut que $\underline{\lim\limits_{y \to -\infty} g(y) = \lim\limits_{y \to +\infty} (y) = 0}$

(14 c) $g(0)/2 > 0$ donc $g(0)/2 \in]0; g(0)[$.

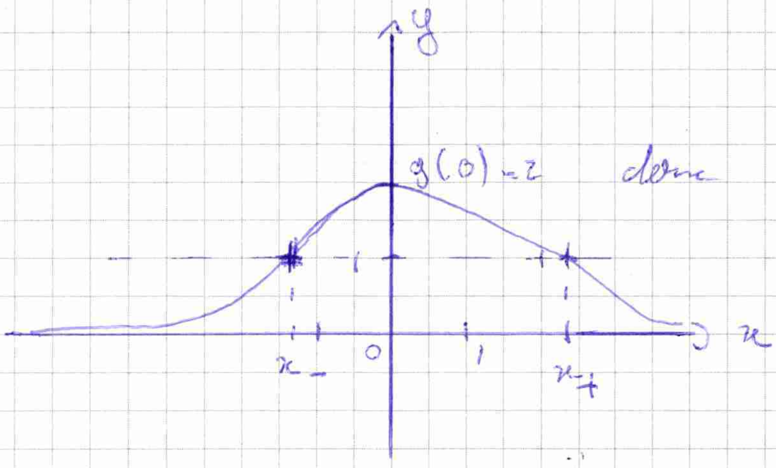
Or g est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et continue, donc g réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ dans $]0; g(0)[$, Comme $g(0)/2 \in]0; g(0)[$:

$\exists! x_{-} \in \mathbb{R}^{*}_{-}$ tq $g(x_{-}) = g(0)/2$

De même, sur $]0;+\infty[$, puisque g est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $g(0)/2 \in]0; g(0)[$.

$\exists!\ x_+ \in \mathbb{R}_+^*$ tq $g(x_+) = g(0)/2$

(14d)



(15) (15a) $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L}(g(s)-g(t))ds + \frac{\cos(A(t-L))-\cos(A(t+L))}{2LA}$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} g(s)\,ds - \frac{2L}{2L}g(t) + \frac{1}{2L}\left[-\frac{1}{A}\cos(As)\right]_{t-L}^{t+L}$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} g(s)\,ds + \int_{t-L}^{t+L}\sin(As)ds - g(t)$$

$$= \underline{F(t) - g(t)}$$

(15b) $\displaystyle\int_{t-L}^{t+L}|s-t|\,ds = \int_{t}^{t+L} s-t\,ds + \int_{t-L}^{t} t-s\,ds$

$$= \left[\frac{s^2}{2}\right]_t^{t+L} - L + L - \left[\frac{s^2}{2}\right]_{t-L}^{t}$$

$$= \frac{(t+L)^2}{2} - \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} + \frac{(t-L)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(2L^2 + 2t^2 - 2t^2) = \underline{L^2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 124654

Emplacement QR Code

Filière : BL

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

(15c) $\forall t \in \mathbb{R}$ on a

inégalité triangulaire

$$|F(t)-g(t)| \leq \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} |g(s)-g(t)|\,ds + \frac{|\cos(A(t-L)) - \cos(A(t+L))|}{2LA}$$

inégalité triangulaire

énoncé car $\forall x \in \mathbb{R} \ |\cos(x)| \leq 1$.

$$\leq \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} |s-t|\,ds + \frac{1}{2LA}$$

d'après (15c) $\leq \frac{1}{2L} \times L^2 + \frac{1}{2LA} = \frac{L}{2} + \frac{1}{2LA}$

On a bien $\forall t \in \mathbb{R} \quad |F(t)-g(t)| \leq \frac{L}{2} + \frac{1}{LA}$

(15d) Il faut faire une étude de fonction sur

$$k_A : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{1}{xA}$$

puis trouver le minimum de k_A sur $\mathbb{R}_+^*$

$L=1$ paraît être un bon candidat.

(16) (16 a)

$\forall t \in \mathbb{R} : \quad F(t) = \frac{1}{2} \int_{t-1}^{t+1} g(s) + \sin(2\pi s)\, ds$

Problème C. ~~Soit X ∈ Ker~~

(17) (17 a) Soit $X \in \mathbb{R}^3$

$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\operatorname{Ker} A = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(17b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$A-\lambda I \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} L_3+\lambda L_1$$

$$\lambda \in Sp(A) \iff \det \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1-\lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \lambda(1+1-\lambda^2)=0 \iff \begin{cases} \lambda^2 = \sqrt{2} \\ \lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \pm\sqrt{2} \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

Donc A admet : trois valeurs propres : 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

(17c) A admet 3 valeurs propres, et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc A est diagonalisable

(18) (18a)

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c} \varphi = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) & \cdots & \varphi(e_k) & \cdots & \varphi(e_{2n+1}) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & & & & \\ & \vdots & 0 & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \varphi(e_1) \\ \varphi(e_2) \\ \varphi(e_3) \\ \varphi(e_4) \\ \vdots \\ \\ \varphi(e_{k-1}) \\ \varphi(e_k) \\ \varphi(e_{k+1}) \\ \\ \\ \\ \varphi(e_{2n}) \\ \varphi(e_{2n+1}) \end{array}$$

(18b) Soit $X \in \mathbb{R}^{2n+1}$

$$\varphi(X) = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ \vdots \\ x_{2n-1} + x_{2n+1} = 0 \\ x_{2n} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!] \quad x_{2i} = 0 \\ \forall i \in [\![0,n]\!] \quad x_{2i+1} = -x_{2i+3}. \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

(18c) Par théorème du rang on a

$2n+1 = 1 + rg\,\varphi \iff \underline{rg\,\varphi = 2n}$

(18d) Soit $Y \in \ker\varphi \cap \mathrm{Im}(\varphi)$.

$\exists X_1 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tq $\varphi(X) = Y$ et $\varphi^2(X) = 0$.

<u>échec</u>