Copie anonyme - n°anonymat : 930513

W1-00019
930513
maths (E)

Filière : B/L

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème C

17a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$rg(A) = 2 \Rightarrow \dim(\ker A) = 1$

En notant f l'application linéaire induite par A, on note que $f(e_1) = f(e_3)$, et donc $f(\underbrace{e_1 - e_3}_{\in \ker(f) = \ker(A)}) = 0$

$\ker A = vect(e_1 - e_3) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

17b) $\dim(\ker A) = 1 \Rightarrow 0 \in sp(A)$

Résolvons $(A - \lambda I)X = 0$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \end{array}\right)$ $\quad L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \end{array}\right)$ $\quad L_2 \leftrightarrow L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda^2)L_3$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(2-\lambda^2) & 0 \end{array}\right)$

$\lambda + \lambda(1-\lambda^2)$
$= \lambda(2-\lambda^2)$

$rg(A-\lambda I) < 3$

$\Longleftrightarrow \lambda(2-\lambda^2) = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = \sqrt{2}$ ou $\lambda = -\sqrt{2}$

$Sp(A) = \{0 ; \sqrt{2} ; -\sqrt{2}\}$

17c) Il y a exactement trois valeurs propres et $A \in M_3(\mathbb{R})$
On en déduit que A est diagonalisable.

18a) $$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n+1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \\ \vdots \\ x_{2n-1} + x_{2n+1} \\ x_{2n} \end{pmatrix}$$

$$\underset{BC}{Mat}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \cdots & \varphi(e_{2n+1}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \\ \\ \\ e_{2n+1} \end{array} = M$$

18b) $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \end{pmatrix} = M'$$

On "remonte" toutes les lignes pour étager M

$rg(M) \geqslant 2n$

$\Rightarrow \dim(\ker M) \leqslant 1$

$$M'X = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ \vdots \\ x_{2n} = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_4 = -x_2 = 0 \\ x_5 = -x_3 = x_1 \\ x_6 = -x_4 = x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_2 = 0 \\ x_{2n} = 0 \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \\ 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm x_1 \end{pmatrix}$$

x_1, si n pair
$-x_1$, si n impair

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}\right)$$

18c) $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = 1 \implies rg(\varphi) = 2n+1-1 = 2n$

18d) Soit $X \in (\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi))$
Mq $X = 0$

On a déjà $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) + rg(\varphi) = 2n+1$

19) $\sin(a+b) + \sin(a-b)$

$= \operatorname{Im}(e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)})$

$= \operatorname{Im}(e^{ia}(e^{ib} + e^{-ib}))$ Euler

$= \operatorname{Im}(e^{ia}(2\cos(b)))$

$= 2\cos(b)\operatorname{Im}(e^{ia})$

$= 2\cos(b)\sin(a)$

20a) $\forall j \in [\![2;2n]\!],\ \varphi_j(v_\theta) = x_{j-1} + x_{j+1}$

$= \sin((j-1)\theta) + \sin((j+1)\theta)$

• $\underline{j=1}$: $\varphi_1(v_\theta) = x_2 = \sin(2\theta)$

$= \underbrace{\sin((1-1)\theta)}_{0} + \sin((1+1)\theta)$

• $\underline{j=2n+1}$: $\varphi_{2n+1}(v_\theta) = x_{2n} = \sin(2n\theta)$

$= \sin((2n+1-1)\theta) + \underbrace{\sin((2n+2)\theta)}_{0}$

Or, $(2n+2)\theta = \dfrac{(2n+2)k\pi}{2n+2} = k\pi$

et $\sin(k\pi) = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$

On a bien $\forall j \in [\![1;2n+1]\!]$, la j^e coordonnée de $\varphi(v_\theta)$ égale à $\sin((j-1)\theta) + \sin((j+1))\theta)$

20b) $\sin(j\theta - \theta) + \sin(j\theta + \theta)$

$= 2\cos(\theta)\sin(j\theta)$ q19

$$\varphi(v_\theta) = \varphi\begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ \vdots \\ \sin((2n+1)\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cos(\theta)\sin(\theta)\\ \vdots \\ 2\cos(\theta)\sin((2n+1)\theta)\end{pmatrix}$$

$= 2\cos(\theta)\, v_\theta$

Copie anonyme - n°anonymat : 930513

Filière : B/L

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

De plus, $\forall k \in [\![1 ; 2n+1]\!]$, $\exists j \in [\![1 ; 2n+1]\!]$ tq $\frac{kj\pi}{2n+2} \neq 0$, donc $v_\theta \neq 0_{\mathbb{R}^{2n+1}}$

On en déduit que v_θ est un vecteur propre associé à la valeur propre $2\cos(\theta)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/

/

Copie anonyme - n°anonymat : 930513

Filière : B/L

Session : 2023

Emplacement QR Code

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème A

4a) Si le résultat est négatif, cela signifie que la propriété est absente, et donc il n'y a pas besoin de procéder à des analyses individuelles.

4b) $A_n(\Omega) = \{1 ; n+1\}$

résultat négatif (1 analyse du mélange)

résultat positif (1 analyse du mélange + n analyses individuelles)

4c) Notons X_i "la i^e personne possède la propriété"

On a alors $P(X_i) = 1-q$

• $P(A_n = 1) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{X_i}\right)$

$= \prod_{i=1}^{n} P(\overline{X_i})$ ⫫

$= \prod_{i=1}^{n} q = q^n$

• $P(A_n = n+1) = 1 - q^n$

4d) $E(A_n) = 1 \times q^n + (n+1)(1-q^n)$

$= q^n(1-(n+1)) + (n-1) = n-1-nq^n$

5) Soit $k \in [\![1 ; n]\!]$

$$P_{(A_n = n+1)}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{X_k}\right) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{X_i}\right)}{P(A_n = n+1)}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{k} P(\overline{X_i})}{P(A_n = n+1)} \quad \perp\!\!\!\perp \text{ des } X_i$$

$$= \frac{q^k}{1-q^n}$$

6a) Notons B_n le nombre d'analyses effectuées avec B.
B_n est en fait une VAR certaine : $B_n = n$ et $E(B_n) = n$

Résolvons $E(A_n) \leqslant n$

$$\iff n+1-nq^n \leqslant n$$

$$\iff 1 - nq^n \leqslant 0 \quad n > 0$$

$$\iff \frac{1}{n} \leqslant q^n \quad \sqrt[n]{\ } \text{ est croissante}$$

$$\iff \boxed{\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \leqslant q}$$

6.b) $f(x) = x^x = \exp(\underbrace{x \ln x}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0 \text{ croissance comparée}}) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

6c) A est préférable à B

$\iff q \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$\frac{1}{n} \to 0$

Or, $q \in]0;1[$

On en déduit que B est préférable à A, pour n assez grand.

7a) $C \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

7b) $E(C) = \frac{1}{p}$

8a) $\{G > k\} \iff \{$les k premiers groupes sont négatifs$\}$
$\iff \{$les nk premières personnes sont négatives$\}$
$\iff \{C > nk\}$

8b) $P(G > k) = P(C > nk) = q^{nk}$

8c) $\cancel{P(G = k) = P(G > k) - P(G > k+1)}$
$\cancel{= q^{nk} - q^{n(k+1)}}$
$\cancel{= q^{nk}(1-q^n)}$

$P(G = k) = P(G > k-1) - P(G > k)$
$= q^{n(k-1)} - q^{nk}$
$= (q^n)^{k-1}(1-q^n)$
$= (1-q')^{k-1} q'$

$G \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q^n)$

9a) $X(\Omega) = [\![1 ; n]\!]$

9b) $P(X=i \mid G=k) \underset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(X=i \cap G=k)}{P(G=k)}$ → i^e personne du k^e groupe, i.e. la $((k-1)n+i)^e$ personne appelée

$$= \frac{P(C=(k-1)n+i)}{P(G=k)}$$

$$= \frac{p \times q^{(k-1)n+i-1}}{(1-q^n) \times q^{n(k-1)}}$$

$$= \frac{p q^{i-1}}{1-q^n}$$

9c) $\dfrac{pq^{i-1}}{1-q^n} = \dfrac{pq^{i-1}}{-(\exp(\underbrace{n\ln q}_{\xrightarrow[q\to 1]{} 0})-1)}$

$$= \frac{\overbrace{-pq^{i-1}}^{\xrightarrow[q\to 1]{} -p}}{\underbrace{n\ln(q)}_{\substack{\xrightarrow[q\to 1]{} 0 \\ n \text{ fixe}}}+o(n\ln q)} \xrightarrow[q\to 1]{} -\infty$$

9d) $X \perp\!\!\!\perp G$, car $\forall i \in [\![1;n]\!], \forall k \geq 1$, on a $P(X=i \mid G=k)$ qui ne dépend pas de k.

9e) $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k P(X=k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{pq^{k-1}}{1-q^n}$$

$$= \frac{p}{1-q^n} \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$$

$$= \frac{p}{1-q^n} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} kq^{k-1} \right)$$

$$= \frac{p}{1-q^n} \left(\frac{1}{(1-q)^2} - \frac{(n+1)q^n}{(1-q)^2} \right)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 930513

Filière : B/L

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$= \frac{1}{1-q^n} \times \frac{1-(n+1)q^n}{(1-q)}$$

$$= \frac{1-(n+1)q^n}{(1-q^n)(1-q)}$$ problème

10a) $\{D=3\} = \{\{G=1 \cap X=2\} \cup \{G=2 \cap X=1\}\}$

10.b) $D = G+X$

le cas $G=0$ est exclu

le cas $X=0$ est exclu

10c) $P(D=j) \overset{FPT}{=} \sum_{k=0}^{j} P(G=k \cap X=j-k)$

$$= \sum_{k=1}^{j-1} P(G=k \cap X=j-k)$$

$\perp\!\!\!\perp$ (qqd)

$$= \sum_{k=1}^{j-1} \underbrace{P(G=k)\,P(X=j-k)}_{\text{la } ((k-1)n+j-k)^e \text{ personne est la bonne}}$$

$$= \sum_{k=1}^{j-1} P(C=(k-1)n+j-k)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

11 a) $E(D) = \sum_{j=1}^{+\infty} j P(D=j)$

$= \sum_{j=1}^{+\infty} j \sum_{k=1}^{j-1} P(C = (k-1)n + j - k)$

$= \sum_{j=1}^{+\infty} j \sum_{k=1}^{j-1} q^{(k-1)n+j-k-1} \quad p$

$= p \sum_{j=1}^{+\infty} j q^j \sum_{k=1}^{j-1} q^{nk-n-k-1}$

$= p \sum_{j=1}^{+\infty} j q^j q^{-n-1} \sum_{k=1}^{j-1} (q^{n-1})^k$

$= \frac{p}{q^{n+1}} \sum_{j=1}^{+\infty} j q^j \times q^{n-1} \times \frac{1-(q^{n-1})^{j-1}}{1-q^{n-1}}$

$= \frac{p q^{n-1}}{q^{n+1}(1-q^{n-1})} \sum_{j=1}^{+\infty} j q^j (1-(q^{n-1})^{j-1})$

$= \frac{p q^{n-1}}{q^{n+1}(1-q^{n-1})} \sum_{j=1}^{+\infty} j q^j - j q^{j+nj-n-j+1}$

$= \frac{p}{q^2(1-q^{n-1})} \sum_{j=1}^{+\infty} j q^j - j q^{nj-n+1}$

$= \frac{pq}{q^2(1-q^{n-1})} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} j \overset{<1}{\overline{q}}^{\,j-1} - \sum_{j=1}^{+\infty} j (\overset{<1}{\overline{q^n}})^{j-1} \right)$

$= \frac{p}{q(1-q^{n-1})} \left(\frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{(1-q^n)^2} \right)$

11b) $E(C) = \frac{1}{p}$

$$\frac{E(D)}{E(C)} = \frac{(1-q^n)^2 - (1-q)^2}{q(1-q^{n-1})(1-q)^2(1-q^n)^2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 930513

Emplacement QR Code

Filière : B/L

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercices

1a) $$v_{n+1} = x_{n+1} - \frac{2\alpha+\beta}{3}$$

$$= \frac{y_n+\alpha}{2} - \frac{2\alpha+\beta}{3}$$

$$= \frac{y_n}{2} - \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(y_n - \frac{2\alpha}{6} - \frac{2\beta}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(y_n - \frac{\alpha+2\beta}{3}\right) = \frac{1}{2} w_n$$

$$w_{n+1} = y_{n+1} - \frac{\alpha+2\beta}{3}$$

$$= \frac{x_n+\beta}{2} - \frac{\alpha+2\beta}{3}$$

$$= \frac{x_n}{2} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{6}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{2\alpha}{3} - \frac{2\beta}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{2\alpha+\beta}{3}\right) = \frac{1}{2} v_n$$

1b) $\cancel{v_n^2 + w_n^2 = \left(x_n - \frac{2\alpha+\beta}{3}\right)^2 + \left(y_n - \frac{\alpha+2\beta}{3}\right)^2}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} w_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} v_{n-1}$

$v_{n-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} v_{n-3}$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{4} v_{n-1}$

- Si n est impair, on a $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n w_0$
- Si n est pair, on a $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$

De même, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{1}{2} w_{n-1}$

- Si n est impair, on a $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$
- Si n est pair, on a $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n w_0$

Dans tous les cas, $v_n^2 + w_n^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} w_0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} v_0^2$

$$= \frac{v_0^2 + w_0^2}{4^n}$$

1c) $v_n^2 + w_n^2 = \frac{\overbrace{v_0^2 + w_0^2}^{cst}}{4^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

/

2a) • $x^2+y^2 \geqslant 0$, $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$

• $\sqrt{x^2+y^2} = 0 \iff x^2+y^2 = 0$ Somme de termes positifs

$\iff x^2 = 0$ et $y^2 = 0$

$\iff x = 0$ et $y = 0$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{0;0\}$

2b) Cauchy-Schwartz : $\left| \dfrac{\langle u;v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \right| \leqslant 1$

$\iff |\langle u;v \rangle| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$

Application : $|x+y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{2}$

2c) $f(a,a) = \dfrac{2a}{\sqrt{2a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{2}\,\underbrace{a}_{>0}} = \sqrt{2}$

De plus, $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(a,a)$
$\forall x,y \in \mathbb{R}$

$f((a;a))$ est un maximum absolu de f
Donc c'est un point critique
Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,a) = 0$ (condition de premier ordre)

3a) $f(x;y) = \dfrac{r(\cos(\theta)+\sin(\theta))}{\sqrt{\underbrace{r^2}_{>0}\underbrace{(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}_{1}}} = \dfrac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r}$

$= \cos(\theta)+\sin(\theta)$

Copie anonyme - n°anonymat : 930513

Filière : B/L

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

3b) $f(x;y)$ ne dépend ni de x, ni de y.
C'est une fonction constante, représentée par un plan parallèle au plan d'ordonnée 0.

Problème B

12a) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} \neq 0$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

12b) $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$
et $f(-x) = \dfrac{1}{e^{-x} + e^{x}} = f(x)$

12c) Par somme et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$

12d) $\forall x \in \mathbb{R}^*_-, (e^x + e^{-x})^2 > 0$

~~De plus,~~ $\cancel{e^{x} - e^{-x} = \underbrace{e^{x}}_{>0}\Big(\overbrace{1 - \underbrace{e^{-2x}}_{>1}}^{>0}\Big) > 0}$, $\cancel{\forall x \in \mathbb{R}_-^*}$

~~En effet,~~ $\cancel{-2x > 0}$

$\cancel{e^{-2x} > 1}$

$\cancel{\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f'(x) > 0}$

De plus, $e^{-x} - e^{x} = e^{-x}(1 - e^{2x})$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $2x < 0$

$\iff e^{2x} < 1$

$\iff 1 - e^{2x} > 0$

$\iff e^{-x} - e^{x} > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

12e) $f(x) = \dfrac{1}{\underbrace{e^{x}}_{\to +\infty} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

13a) $u = e^{x}$ $\quad \mathcal{C}^1$

(1) $du = e^{x}\, dx$

(2) $\dfrac{1}{e^{x} + e^{-x}}\, dx = \dfrac{e^{x}}{e^{2x} + 1}\, dx = \dfrac{du}{u^2 + 1}$

(3) $0 \leftarrow e^{0} = 1$

$M \leftarrow e^{M}$

$\displaystyle\int_0^M f(x)\, dx = \int_1^{e^M} \frac{du}{1 + u^2}$

13b) $I = \left[\arctan(u)\right]_1^{e^M}$

$= \underbrace{\arctan(e^M)}_{\to \frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4} \xrightarrow[M\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \underset{f \text{ paire}}{=} 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

13c)

13d) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ $\quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leqslant 1$

IAF $\quad |f(x)-f(y)| \leqslant 1|x-y| \quad , \forall x;y \in \mathbb{R}$

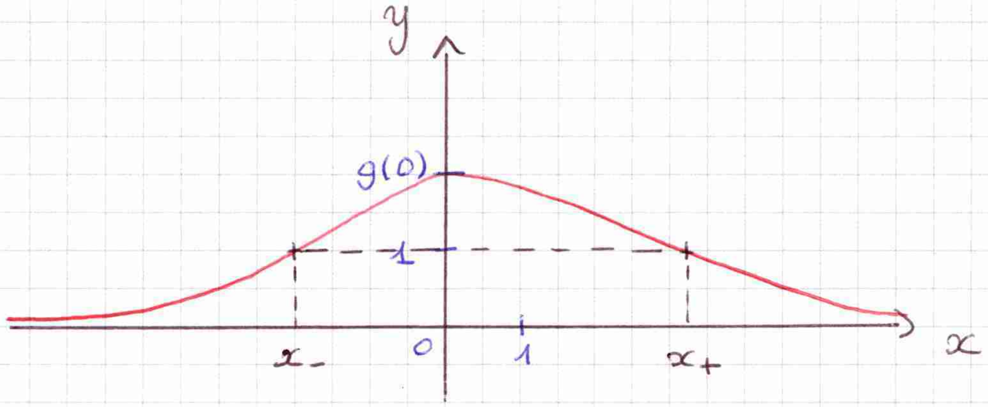
14a) Si $\int_{-\infty}^{+\infty} g$ cv, alors $g(x) \xrightarrow[\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}]{} 0$

Si $g(x) \xrightarrow[\substack{x\to-\infty \\ x\to+\infty}]{} \ell \neq 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} g$ divergerait grossièrement.

14b) Idem.

14c) g est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_-^*$ dans $]0;g(0)]$.
De plus, on a $\frac{g(0)}{2} \in]0;g(0)]$.
D'après le théorème de la bijection monotone. Il existe exactement un réel x_- tq $g(x_-) = \frac{g(0)}{2}$.
De même sur $\mathbb{R}_+^*$.

14d)



15a) $F(t) - g(t) = \left(\frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} h(s)\,ds\right) - g(t)$

$$= \left(\frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} g(s) + \sin(As)\,ds\right) - g(t)$$

$$= \left(\frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} g(s) + \sin(As)\,ds\right) - \frac{\int_{t-L}^{t+L} g(t)\,ds}{2L}$$

$$= \frac{1}{2L}\left(\int_{t-L}^{t+L} (g(s) - g(t))\,ds + \int_{t-L}^{t+L} \sin(As)\,ds\right)$$

$$= \frac{1}{2L}\left(\int_{t-L}^{t+L} g(s) - g(t)\,ds\right) + \left[\frac{-\cos(As)}{A}\right]_{t-L}^{t+L}$$

$$F(t) - g(t) = \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} g(s) - g(t)\,ds + \frac{\cos(A(t-L)) - \cos(A(t+L))}{A2L}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 930513

Filière : B/L

Session : 2023

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

15b) $\int_{t-L}^{t+L} |s-t| \, ds$

$$= \int_{t-L}^{t} \underbrace{|s-t|}_{s \leq t} ds + \int_{t}^{t+L} \underbrace{|s-t|}_{s \geq t} ds$$

$$= \int_{t-L}^{t} t-s \, ds + \int_{t}^{t+L} s-t \, ds$$

$$= \left[-\frac{s^2}{2} + st \right]_{t-L}^{t} + \left[\frac{s^2}{2} - st \right]_{t}^{t+L}$$

$$= \cancel{-\frac{t^2}{2}} + \cancel{t^2} + \frac{(t-L)^2}{2} - (t-L)t + \frac{(t+L)^2}{2} - t(t+L) \cancel{-\frac{t^2}{2}} + t^2$$

$$= t^2 - 2t(t-L) + \frac{t^2 \cancel{-2Lt} + L^2 + t^2 \cancel{+2Lt} + L^2}{2}$$

$$= \cancel{t^2} \cancel{-2t^2} + 2tL \cancel{+t^2} + L^2$$

problème

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

15 c) Inégalité triangulaire

$$|F(t)-g(t)| \leqslant \left|\frac{1}{2L}\right| \int_{t-L}^{t+L} |g(s)-g(t)|\,ds + \frac{|\cos(A(t-L))|+|\cos\ldots|}{|2LA|}$$

(+) de l'intégrale

$$\leqslant \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} |s-t|\,ds + \frac{2}{2LA}$$

$$\leqslant \frac{1}{2L} L^2 + \frac{1}{LA}$$

$$|F(t)-g(t)| \leqslant \frac{L}{2} + \frac{1}{LA}$$

15d) On cherche le minimum de $u : x \longmapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{xA}$

$u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$

$\forall x > 0,\ u'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{Ax^2}$

$u'(x) > 0$

$\iff \frac{1}{2} > \frac{1}{Ax^2} > 0$

$\iff Ax^2 > 2$

$\iff x^2 > \frac{2}{A}$

$\iff x > \sqrt{\frac{2}{A}}$

x	0		$\sqrt{\frac{2}{A}}$		$+\infty$
$u(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Il faut prendre $L = \sqrt{\frac{2}{A}}$.

16a) $F(t) = \frac{1}{2} \int_{t-L}^{t+L} g(s) + \sin(2\pi s)\, ds$

$= \frac{1}{2} \int_{t-L}^{t+L} g(s) + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2\pi s)}{2\pi} \right]_{t+L}^{t-L}$

$= \frac{1}{2} \int_{t-L}^{t+L} g(s) + \frac{\cos(2\pi(t-L)) - \cos(2\pi(t+L))}{4\pi}$

16b) On a $|F(t) - g(t)| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}$