A5-00023
982913
maths (E)

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème A

1) a) $R_0(\Omega) = [\![1;5]\!]$

~~$\forall k \in R_0(\Omega)$, $P((R_0$~~

$\forall k \in [\![1;4]\!]$, $\boxed{\begin{array}{l} P((R_0=k)) = \frac{1}{6} \\ P((R_0=5)) = \frac{2}{6} \end{array}}$, dé équilibré

b) $E(R_0) = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + \dots + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{2}{6}$

$= \frac{1+2+3+4+10}{6}$

$= \frac{20}{6}$

$\boxed{E(R_0) = \frac{10}{3}}$

2) a) $\boxed{X \hookrightarrow B\left(\frac{1}{3}\right)}$

b) $E(X) = 0\times\frac{2}{3} + 1\times\frac{1}{3}$

$\boxed{E(X) = \frac{1}{3}}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$= 1^2 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{9}$

$V(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}$

$\boxed{V(X) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}$ conforme à la formule du cours.

3) a) ~~X~~ On réalise des lancers identiques et indépendants à condition d'avoir lieu. On cherche le premier succès.

$\boxed{Y \hookrightarrow G\left(\frac{1}{3}\right)}$ (car on commence à $i=1$)

b) $\boxed{E(Y) = 3}$

c) $V(Y) = \dfrac{1 - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$= \frac{2}{3} \times 9$

$\boxed{V(Y) = 6}$

4) a) ~~XX~~ $i-1 \geq 0$ donc pas de problème de définition.

~~$P(S_i) = P((R_{i-1} = 5) \cap R_i$~~

$P(S_i) = \sum_{j=1}^{5} P((R_{i-1} = j) \cap (R_i = j))$ union d'évènements incompatibles

$= \sum_{j=1}^{5} P(R_{i-1} = j) \times P(R_i = j)$ indépendance

$= 4 \times \frac{1}{36} + \frac{4}{36}$

$P(S_i) = \frac{8}{36}$

$$\boxed{P(S_i) = \frac{2}{9}}$$

b) $\forall i \geq 1$, S_i et S_{i+k} avec $k \geq 2$ sont indépendants par le protocole.

$$P(S_i) \times P(S_{i+1}) = \frac{4}{81}$$

$$P(S_i \cap S_{i+1}) = P(S_i) \times P(S_{i+1} \mid S_i) \qquad \text{cars } P(S_i) \neq 0$$

→ FPT

$$= \frac{2}{9} \times \left(P(S_{i+1} \mid (R_{i-1}=5) \cap (R_i = 5)) + \sum_{k=1}^{4} P(S_{i+1} \mid R_{i-1}=k \cap R_i = k) \right)$$

$$= \frac{2}{9} \times \left((P(R_{i+1}=5) + \sum_{k=1}^{4} P(R_{i+1}=k) \right)$$

$$= \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{36} \right)$$

$$= \frac{2}{9} \left(\frac{16}{36} \right)$$

$$= \frac{3\cancel{2}}{\ }$$

$$= \frac{2}{9} \times \frac{4}{9}$$

$$P(S_i \cap S_{i+1}) = \frac{8}{81} \neq \frac{4}{81}$$

Donc S_i et S_{i+1} ne sont pas indépendants

Les événements ne sont pas mutuellement indépendants

4.c) $$P((R_1=5) \mid S_2) = \frac{P((R_1=5) \cap S_2)}{P(S_2)} \qquad P(S_2) \neq 0$$

$$= \frac{P(S_2 \mid R_1 = 5) \times P(R_1 = 5)}{P(S_2)} \qquad \text{probas composées}$$

$$= \frac{P(R_2 = 5) \times P(R_1 = 5)}{P(S_2)}$$

$$P((R_1=5)|S_2) = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}}$$

$$\boxed{P((R_1=5)|S_2) = \frac{1}{2}}$$

5)a) Z est le premier i tel que S_i se réalise

Autrement dit, $\forall i \geq 1$, $\boxed{P(Z=i) = P\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{S_j} \cap S_i\right)}$

5b) **Non** : On a montré en 4.6 que les événements S_i et S_{i+1} ne sont pas indépendants (même à condition d'avoir lieu).

6) $P(B=R_0) = \sum_{k=1}^{6} P((B=k)\cap(R_0=k))$ union d'événements incompatibles

$= \sum_{k=1}^{4} P((B=k)\cap(R_0=k)) + P((B=5)\cap R_0=5) + 0$ $\quad 6 \notin R_0(\Omega)$

$= \sum_{k=1}^{4} P((B=k)) \times P(R_0=k) + P((B=5)) \times P((R_0=5))$ $\quad \perp\!\!\!\perp$

$= 4 \times \frac{1}{36} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{4}{36} + \frac{1}{18}$

$= \frac{6}{36}$

$$\boxed{P(B=R_0) = \frac{1}{6}}$$

Emplacement QR Code

Filière : A\L

Session : 2024

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

7) $P(V=R_0) = P((V=1)\cap(R_0=1)) + P((V=3)\cap(R_0=3)) + P((V=5)\cap(R_0=5))$

incompatibles

$= P(V=1)\times P(R_0=1) + P(V=3)\times P(R_0=3) + P(V=5)\times P(R_0=5)$

independance

$= \frac{2}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\times\frac{2}{6}$

$= \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{6}{36}$

$= \frac{9}{36}$

$\boxed{P(V=R_0) = \frac{1}{4}}$

8) a) $\frac{1}{2} \leq e^1$ (car $e^1 > 2$)

D'où $\boxed{f(1) = \frac{1}{2}}$

$\frac{2}{2} = e^0 = 1$ d'où $\boxed{f(2) = 1}$

$\frac{2+\ln(2)}{2} \geqslant \frac{2}{2} \geqslant e^{0} \geqslant e^{2-(2+\ln(2))}$

D'où $f(2+\ln(2)) = e^{-\ln(2)} = \frac{1}{e^{\ln(2)}}$

$\boxed{f(2+\ln(2)) = \frac{1}{2}}$

8b/ Soit $h : x \longmapsto e^{2-x} - \frac{x}{2}$

$h \in D(\mathbb{R}^+)$ par opérations usuelles,

et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $h'(x) = -e^{2-x} - \frac{1}{2}$

~~D'où $h(x) \geqslant 0 \iff -e^{2-x}$~~

Tout est strictement négatif, h est strictement décroissante.

$h(0) = e^{2}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ $\quad$ (car $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$).

h est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $]-\infty ; e^{2}]$.

$e^{2} > 0$ donc 0 est valeur intermédiaire. Théorème de la bijection :

$\exists!\, x_0 \in \mathbb{R}$ tq $h(x_0) = 0$

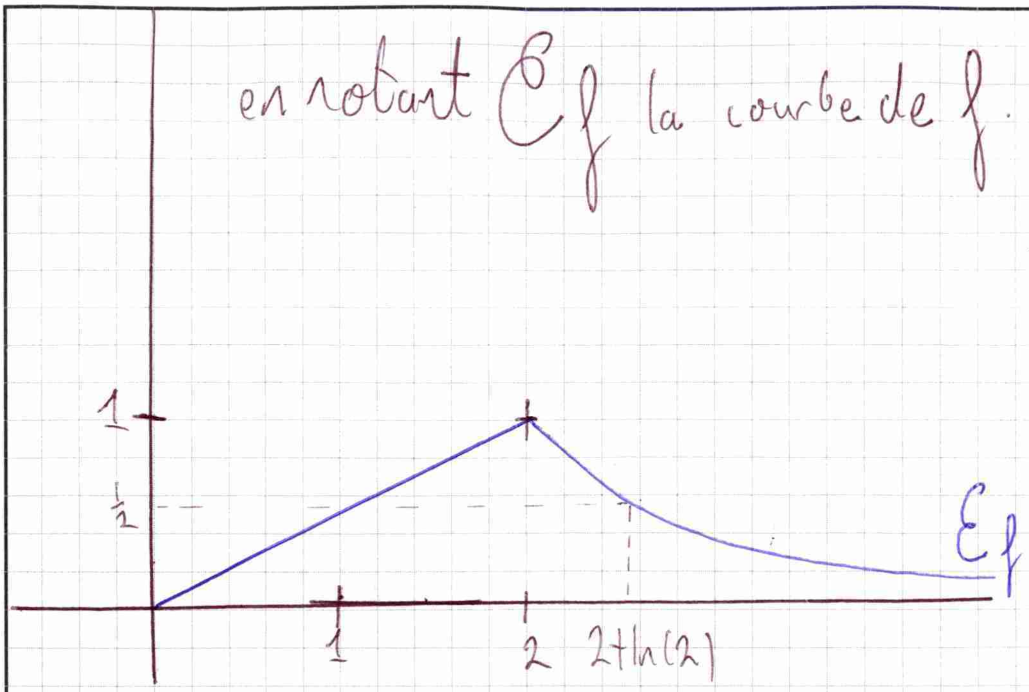
D'où il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $\frac{x}{2} = e^{2-x}$

et on a vu en 8a que ~~cela~~ ce nombre était 2.

c) $\forall x \leqslant 2$, $\frac{x}{2} \leqslant e^{2-x}$ ~~donc~~

$\forall x > 2$, $e^{2-x} < \frac{x}{2}$

On a donc une ~~fonction~~ courbe par morceaux de courbe de fonctions usuelles en notant $\mathcal{C}_f$ la courbe de f.



9a) f est bien continue, f est positive.

$$\int_0^{+\infty} \lambda f(x)dx = \lambda\left(\int_0^2 \frac{x}{2}dx + \int_2^{+\infty} e^{2-x}dx\right)$$ tout est bien convergent

$$= \lambda\left(\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 + \left[-e^{2-x}\right]_2^{+\infty}\right)$$

$$= \lambda(1 + 0 + 1$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda f(x)dx = 2\lambda$$

Comme on doit avoir $\int_0^{+\infty} \lambda f(x)dx = 1$

On a $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$

9b) $P(N>2) = 1 - P(N \leq 2)$

$$= 1 - \int_0^2 \frac{x}{4}dx$$

$$\boxed{P(N>2) = \frac{1}{2}}$$

9.c) $P(N>x+2 \mid N>2) = \dfrac{P(N>x+2 \cap N>2)}{P(N>2}$

$P(N > x+2 | N > 2) = \frac{P(N > x+2)}{P(N > 2)}$ car $\{N > 2\} \subset \{N > x+2\}$

$$= 2 \times \int_{x+2}^{+\infty} \frac{e^{2-t}}{2} dt$$

$$= 2 \times \left[-\frac{e^{2-t}}{2} \right]_{x+2}^{+\infty}$$

$$\boxed{P(N > x+2 | N > 2) = e^{-x}}$$

9a) $E(N) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} t f(t) dt$

$\cancel{= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty}}$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 \frac{t^2}{2} + \int_2^{+\infty} t e^{2-t} dt . \right)$$

~~On note I_y =~~ Changement de variable bijectif, on pose $u = t-2$

$$E(N) = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 \frac{t^2}{2} + \int_0^{+\infty} (u+2) e^{-u} du \right.$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{t^3}{6} \right]_0^2 + \int_0^{+\infty} u e^{-u} + 2 \int_0^{+\infty} e^{-u} du \right.$$

tout est positif

espérance loi exponentielle de paramètre 1.

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{6} + 1 + 2 \left[-e^{-u} \right]_0^{+\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{6} + 1 + 2 \right.$$

$$= \frac{8 + 6 + 12}{12}$$

$$= \frac{26}{12}$$

$$\boxed{E(N) = \frac{13}{6}}$$

Filière : B\L

Session : 2024

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

10)a) $P(D=5) = \frac{1}{2}$ dé équilibré, 3 faces

~~Or $P(N>2) = P(N \geq 2) =$~~

~~densité~~

Or $P(N>2) = P(N \geq 2) = \frac{1}{2}$ (9.6)

$\boxed{b = 2}$

10b) $P(D=1) = \frac{1}{3}$ dé équilibré, 2 faces

On cherche a tel que $\int_0^a \frac{x}{4} dx = \frac{1}{3}$ car $a<2$ nécessairement

$\frac{a^2}{8} = \frac{1}{3} \iff a^2 = \frac{8}{3} \iff a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $(a>0)$

D'où $\boxed{a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ (on a bien $a<2$)

11) On cherche g tel que $\int_1^2 g(t)dt = \frac{1}{6}$, $\int_2^3 g(t)dt = \frac{1}{6}$ ... et $\int_5^6 g(t)dt = \frac{1}{3}$

en définissant g par $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{6} & \forall x \in [1;5[\\ g(x) = \frac{1}{3} & \forall x \in]5;6] \\ g(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

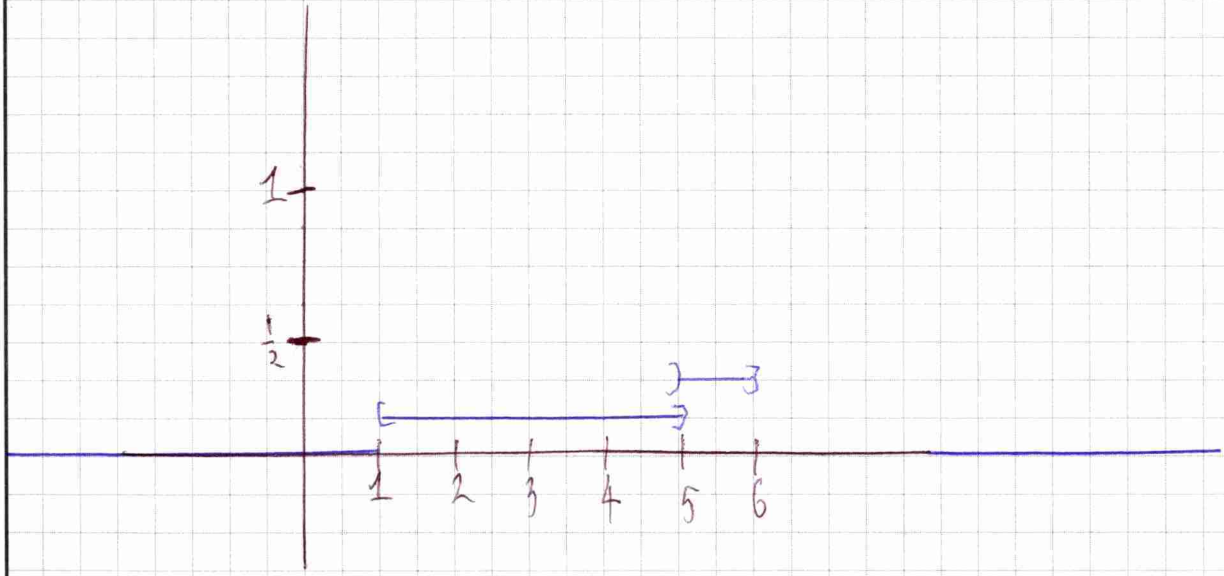
On a bien g continue presque partout, positive, et $\int_1^6 g(t)dt = 1$

$P([G_J = k]) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in [\![1;4]\!]$ $\left(P([G_J = k]) = \int_k^{k+1} g(t)dt \right)$

$P([G_J = 5]) = \frac{1}{3}$

g telle qu'on l'a définie convient

et voici son graphe dans un repère orthogonal



Problème A:

(12)a) $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $2e^{-\frac{1}{x}} \underset{+\infty}{=} o(x)$

et $\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

b) $-\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ d'où $\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

d'où $\boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0}$

c) $g(x) - x = -2e^{-\frac{1}{x}} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

donc ~~g n'inters~~ la courbe de g n'intersecte pas la droite d'équation $y = x$, mais g est prolongeable par continuité en 0 $g(0)=0$, donc d'une certaine manière cela marche en 0.

13)a) $\boxed{\lim_{t \to 0^+} h(t) = -\infty}$ pas de forme indéterminée

$\boxed{\lim_{t \to +\infty} h(t) - t = -\infty}$ car $h(t) \underset{+\infty}{=} o(t)$

b) Le logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, toute fonction affine également.

Par opérations usuelles, $h \in D(\mathbb{R}^{+*})$ car on somme des fonctions dérivables.

$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\boxed{h'(t) = \frac{1}{t} - 1}$

c) $h'(t) > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 1$

D'où

t	0		1		+∞
h(t)	‖	-∞ ↗	-1	↘	-∞

13d) Soit $f : t \mapsto \ln(2t) - t$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$f'(t) = \frac{2}{2t} - t = \frac{1}{t} - t$$

donc f admet un maximum en 1

mais $f(1) = \ln(2) - 1 < 0$ car $\ln(2) < \ln(e) = 1$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(2t) < t}$$

13e) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

~~$\ln(2x) -$~~

~~$x - \ln(2x) > 0$~~

~~$e^{x} - 2x$~~

~~$e^{x} - \ln(2x) > 0$~~

Copie anonyme - n°anonymat : 982913

Emplacement QR Code

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

14)a) la 13e montre que $\forall x > 0$, $g(x) > 0$

donc $\mathbb{R}^{+*}$ est stable par g et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie. $(u_0 > 0)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = -2e^{-\frac{1}{u_n}} < 0$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, elle admet une limite

c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, elle admet une limite réelle ~~d~~

g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, on cherche à faire un théorème du point fixe mais g n'admet pas de point fixe (12.c), hormis 0 si on prolonge g par continuité.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ réel positif

~~On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in [0, +\infty[$~~ et 0 est le seul point fixe avec g prolongée.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

15) fonction dérivable, elle admet un DL à l'ordre 1 et

$$(1-s)^{-\alpha} \underset{0}{=} 1 + \left(-\alpha \frac{(-s)}{1}\right) + o(s)$$

$$\boxed{(1-s)^{-\alpha} \underset{0}{=} 1 + \alpha s + o(s)}$$

15 b)

~~$\frac{2e^{-\frac{1}{x}}}{x} \underset{+\infty}{=} \frac{2}{x} \times \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(-\frac{1}{x}\right)\right).$~~ ~~$e^u = 1 + u$ car $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$~~

~~$\frac{2e^{-\frac{1}{x}}}{x} \underset{+\infty}{=} \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$~~

~~D'où $\lim\limits_{k\to+\infty} 2u_k^{-1} e^{-\frac{1}{u_k}} = 0$~~

~~$2u_k^{-1} e^{-\frac{1}{u_k}} \underset{+\infty}{=} 2u_k^{-1}\left(1 - \frac{1}{u_k} + o\left(\frac{1}{u_k}\right)\right)$ $e^u \underset{0}{=} 1+u$~~ car

~~$e^{-\frac{1}{u_k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$ u_k~~

$k \to +\infty \Rightarrow u_k \to 0^+$

donc ~~$2u_k$~~ ~~$\frac{2}{u_k} e^{-\frac{1}{u_k}}$~~ Donc en posant $N_k = \frac{1}{u_k}$

$2N_k e^{-N_k} \xrightarrow[N_k\to+\infty]{} 0$ car $x \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ ie $xe^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ $\left(xe^{-x} = \frac{x}{e^x}\right)$

ie $u_k \to 0^+$

D'où $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} u_k^{-1} e^{-\frac{1}{u_k}} = 0}$

15 c) $u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha} = \left(u_k - 2e^{-\frac{1}{u_k}}\right)^{-\alpha} - u_k^{-\alpha}$

~~Comme $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et $e^{-\frac{1}{u_k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$~~

~~$= u_k^{-\alpha}(1 - 2u_k$~~

$u_{k+1}^{\alpha} - u_k^{\alpha} = (u_k(1 - 2u_k^{-1}e^{-\frac{1}{u_k}}))^{-\alpha} - u_k^{-\alpha}$

or $u_k^{-1}e^{-\frac{1}{u_k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc en reprenant le DL de la (15 a).

$u_{k+1}^{\alpha} - u_k^{\alpha} \underset{+\infty}{=} u_k^{-\alpha}(1 + \alpha u_k^{-1}e^{-\frac{1}{u_k}} + o(u_k^{-1}e^{-\frac{1}{u_k}})) - u_k^{-\alpha})$

$u_{k+1}^{\alpha} - u_k^{\alpha} \underset{+\infty}{=} \alpha u_k^{-1-\alpha}e^{-\frac{1}{u_k}} + o(u_k^{-1-\alpha}e^{-\frac{1}{u_k}})$

Or avec le même raisonnement qu'en 15.6, l'exponentielle "gagne" toujours et $\lim\limits_{k\to+\infty} k u_k^{-1-\alpha}e^{-\frac{1}{u_k}} = 0$

D'où $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha} = 0}$ (deux équivalents ont même limite)

15)d) $|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| = |u_n^{-\alpha} - u_p^{-\alpha} + u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}|$

$|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha} \leq |u_n^{-\alpha} - u_p^{-\alpha}| + |u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}|$ } inégalité triangulaire

Reste à fixer le p.

$\forall \varepsilon > 0, \exists q \text{ tq } \forall n \geqslant q$

15. f) On admet de la 15.d que $|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \leq 2\varepsilon n$
~~$\forall n \geqslant q$~~

D'où $\dfrac{|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}|}{n} \leqslant 2\varepsilon$

donc en posant $\varepsilon' = 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0, \exists q \text{ tq } \forall n \geqslant q$.

$$\frac{|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}|}{n} \leq \varepsilon'$$

Def de la limite : $\dfrac{|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

mais $u_0^{-\alpha}$ est une constante d'où $\dfrac{|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}|}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^{-\alpha}}{n}$ $(u_n^{-\alpha} > 0)$

On a donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^{-\alpha}}{n} = 0}$

15 f)! $\dfrac{1}{nu_n^{\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Comme $\alpha > 0$, $\left(\dfrac{u_n^{-\alpha}}{n}\right|^{\alpha+1} = \dfrac{u_n}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Emplacement QR Code

Filière : A\L

Session : 2024

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

16) a). F est C^2 ~~sur~~ par opérations usuelles.

$$\partial\frac{1}{1}F(x,y) = 1 - y\left(\frac{1}{x}\right)^2 e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\partial\frac{1}{1}F(x,y) = 1 - \frac{y\,e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}}$$

$$\boxed{\partial\frac{1}{2}F(x,y) = -e^{-\frac{1}{x}}}$$

Domaine ouvert : tout extremum local est un point critique.

Or $-e^{-\frac{1}{x}} = 0$ est impossible (exponentielle strictement positive)

F n'admet pas d'extremum local

17a)

$$F(x,y) = x - ye^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{t} - ye^{-t}$$

$$\ln(F(x,y)) = -\ln(t) - \ln(ye^{-t})$$

$\ln(F(x,y))$ = ~~$= \ln(t) + \ln(\frac{-1}{ye^{-t}})$~~

= ~~$-\ln(t) + \ln($~~

$= -\ln(t) - \ln(y) - \ln(e^{-t})$

$= -\ln(t) + \ln(\frac{1}{e^{-t}}) \quad -\ln(y)$

$= -\ln(t) + \ln(e^{t}) - \ln(y)$

$\ln(F(x,y)) = -\ln(t) + t - \ln(y)$

ln bijectif d'où $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow \ln(F(x,y)) = 1$

$\Leftrightarrow -\ln(t) + t - \ln(y) = 1$

$\Leftrightarrow \ln(t) - t = -\ln(y) - 1$

$\Leftrightarrow \boxed{h(t) = -\ln(y) - 1} = r$

17b) en reprenant la 13a, si $r = -1$, $h(t) = r$ admet une solution

si $r < -1$, $h(t) = r$ admet deux solutions

si $r > -1$, $h(t) = r$ n'admet pas de solutions

17.c) $\ln(y) - 1 = -1 \Leftrightarrow \ln(y) = 0 \Leftrightarrow y = 1$

si $y = 1$, $F(x,y) = 0$ admet une unique solution

si $y > 1$ $F(x,y) = 0$ n'admet pas de solutions

si $y < 1$, $F(x,y) = 0$ admet deux solutions

} en x

Problème C

18.a) $\rho\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\z\\-x\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}}$ représente ρ dans la base canonique, qui est donc bien linéaire ($\exists A$ tq $\rho(X)=AX \quad \forall X\in\mathbb{R}^3$)

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix} \\ A^TA= \begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}.$$

Donc $A^TA = I_3$

A est bien inversible (d'inverse A^T)

19a) $A-I = \begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

deux lignes colinéaires, $\text{rg}(A-I) = 2$ donc 1 est bien valeur propre

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$(A-I)X=0 \iff \begin{cases}-x-y=0\\-y+z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-y\\y=z\end{cases} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z\\z\\z\end{pmatrix}$$

$v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ est bien vecteur propre associé à 1.

19.b) $\langle v_1,v_2\rangle = (-1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$$= -2+1+1$$

$$\boxed{\langle v_1 v_2\rangle = 0}$$

19c) soit $v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \langle v_3 , v_2 \rangle = 0 \\ \langle v_1 ; v_3 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 3y + 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = y + z = 0 \end{cases}$$

tout vecteur de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix}$ répond au critère d'orthogonalité

mais $\|v_2\| = \sqrt{6}$

donc on pose $\boxed{v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}}$

19.d) $\langle v_1 , v_2 \rangle = 0$ $\langle v_1 , v_3 \rangle = 0$ $\langle v_2 ; v_3 \rangle = 0$

(v_1 , v_2 , v_3) sont donc orthogonaux entre eux.

Donc ils forment une famille libre

Or $\text{card}((v_1 , v_2 , v_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

famille libre maximale : (v_1 , v_2 , v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

19e) $\rho(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} v_2 + \beta v_3$

$$\begin{cases} -1 = -1 + 0 \times \beta \\ 1 = -\frac{1}{2} - \beta\sqrt{3} \\ -2 = -\frac{1}{2} + \beta\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \beta = -\frac{3}{2\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right.$$

On a $\boxed{\rho(v_2) = -\frac{1}{2} v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} v_3}$

Copie anonyme - n°anonymat : 982913

Emplacement QR Code

Filière : MPSI

Session : 2024

Épreuve de : MATHS.

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$\rho(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 + \delta v_3$$

Cherchons δ

$$\begin{cases} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 + 0 \\ \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\delta \\ 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\delta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \delta = -\frac{1}{2}$$

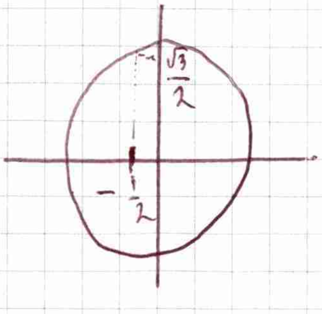
On a $\boxed{\rho(v_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 - \frac{1}{2} v_3}$

19f) Comme $\rho(v_1) = v_1$ (19a)

On a

$$\boxed{B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} \rho(v_1) & \rho(v_2) & \rho(v_3) & \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}\right) & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \end{array}}$$

19g) $\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$ convient, illustration sur un cercle trigo:



20)a) C et C^T ont mêmes valeurs propres. Soit $X \in \mathbb{R}^3$

d'où $C^T X = -X$ est impossible puisque -1 n'est pas valeur propre.

$\mathrm{Ker}(C^T + I_3) = \{0\}$ $\underline{C^T + I_3 \text{ est inversible}}$

20)b)

$$(C^T+I_3)(C-I_3) = C^TC + C - C^T - I_3$$

$$\boxed{(C^T+I_3)(C-I_3) = C - C^T}$$ car $C^TC = I_3$

20.c) C et C^T ont même diagonale donc la diagonale de $C - CT$ est nulle.

<u>en négligeant la diagonale</u> : C est de la forme $\begin{pmatrix} & a_3 & a_5 \\ a_1 & & a_6 \\ a_2 & a_4 & \end{pmatrix}$

$$C - CT = \begin{pmatrix} & a_3 & a_5 \\ a_1 & & a_6 \\ a_2 & a_4 & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 \\ a_3 & & a_4 \\ a_5 & a_6 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & a_3 - a_1 & a_5 - a_2 \\ a_1 - a_3 & & a_6 - a_4 \\ a_2 - a_5 & a_4 - a_6 & \end{pmatrix}$$

donc en notant $a = a_3 - a_1$, $b = a_5 - a_2$, $c = a_6 - a_4$, on a bien montré qu'il existe des réels a, b, c tels que

$$\boxed{C - CT = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}}$$

20.d) $C - C^T$ est une matrice antisymétrique

e) On a donc $\mathrm{Ker}((C^T+I_3)(C-I_3)) \neq \{0\}$

Or C^T+I_3 est inversible, donc $C-I_3$ n'est pas inversible ie $1 \in S(C)$

21) On retrouve avec le même raisonnement que $(C^T+I_3) \times (C-I_3)$ est non inversible. Donc que C^T+I_3 et $C-I_3$ soient toutes les deux inversibles est absurde.

C^T+I_3 ou $C-I_3$ est non inversible et donc 1 appartient au spectre de C ou -1 appartient au spectre de C^T

C et C^T ont même spectre d'où 1 ou -1 appartiennent au spectre de C.

Mais si $X \in \mathbb{R}^3$, $CX = -X \Leftrightarrow -CX = X$

d'où $-1 \in Sp(C) \Leftrightarrow 1 \in Sp(-C)$

1 ou $-1 \in Sp(C)$ ie $\boxed{1 \in (Sp(C) \cup Sp(-C)}$

22a) $(H_V)^T = \left(2\frac{VV^T}{\|V\|^2} - I_3\right)^T$

$$(H_v)^T = 2\frac{(VV^T)^T}{\|V\|^2} - I_3$$

$$= 2\frac{(V^T)^T V^T}{\|V\|^2} - I_3 = \frac{2VV^T}{\|V\|^2} - I_3$$

$$\boxed{(H_v)^T = H_v}$$

$$H_vV = 2\frac{VV^TV}{\|V\|^2} - V$$

$$= 2\frac{V\|V\|^2}{\|V\|^2} - V$$

$$\boxed{H_vV = V}$$

$$(H_v)^T H_v = \left(2\frac{VV^T}{\|V\|^2} - I_3\right)^2$$ puisque $H_v = (H_v)^T$

$$= 4\frac{VV^TVV^T}{\|V\|^4} - 4\frac{VV^T}{\|V\|^2} + I_3$$

I_3 commute avec toute matrice : identité remarquable

$$= 4\frac{VV^T}{\|V\|^2} - \frac{4VV^T}{\|V\|^2} + I_3$$ $\leftarrow V^TV = \|V\|^2$

$$\boxed{(H_v)^T H_v = I_3} = H_v^2$$

22)b) $H_vX = Y \Rightarrow H_v^2X = H_vY \Leftrightarrow X = H_vY$
$H_vY = X \Rightarrow H_v^2Y = H_vX \Leftrightarrow Y = H_vX$ $\Big\}$ car $H_v^2 = I_3$

On a bien montré que $\boxed{H_vX = Y \Leftrightarrow H_vY = X}$

23a) $H_{X+Y}X = \left(2\frac{(X+Y)(X+Y)^T}{\|X+Y\|^2} - I_3\right)X$

Filière : B\L

Session : 2024

Épreuve de : MATHS

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$H_{x+y}X = 2\frac{(x+y)(x+y)^T X}{\|x+y\|^2} - X$$

$$=$$

23.6) $MTM = (H_{v+e_1})^T R^T (H_{v+e_1})^T H_{v+e_1} R H_{v+e_1}$

$= (H_{v+e_1})^T R^T R H_{v+e_1}$ car 22a) on a bien $v+e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

Or,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(r) & \sin(r) \\ 0 & -\sin(r) & \cos(r) \end{pmatrix}$$

$$R^T R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(r) & -\sin(r) \\ 0 & \sin(r) & \cos(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(r)+\sin^2(r) & \cos(r)\sin(r)-\sin(r)\cos(r) \\ 0 & \cos(r)\sin(r)-\sin(r)\cos(r) & \sin^2(r)+\cos^2(r) \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a donc

$$R^T R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car } \cos^2(r) + \sin^2(r) = 1$$

D'où $M^T M = (H_{v+e_1})^T H_{v+e_1}$

$$\boxed{M^T M = I_3} \quad (22a)$$

24)a) soit $\langle x; u \rangle = 0$

~~en notant A la matrice de φ,~~ on a donc

~~$\langle x; Au \rangle = 0$~~

$(Au)^T$

$\langle \varphi(x); \varphi(u) \rangle = \langle x; u \rangle$

or $\varphi(u) = u$

d'où $\boxed{\langle \varphi(x); u \rangle = \langle x; u \rangle = 0}$

24.b) Soit $y \in \ell(E_1^\perp)$

$\exists x \in E_1^\perp$ tq $y = \ell(x)$

~~$<\ell(x); u> = 0 \Rightarrow <x, u> = 0$ (démonstration analogue à la 24.a)~~

D'où $\forall x' \in E_1$,

$< y ; x' > = <\ell(x) ; x'>$

Or $\ell(x') = x'$ d'où

$<y ; x'> = <x ; x'> = 0$

On a bien $y \in E_1^\perp$

$$\boxed{\ell(E_1^\perp) \subset E_1^\perp}$$

24.c) $\boxed{n_{11} = 1}$ et tous les autres coefficients sont nuls

En effet, $\ell(u) = u$ d'où $n_{21} = n_{31} = 0$.

Mais si $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tq $\ell(v) = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w$

Or $<\ell(u) ; \ell(v)> = <u, v> = 0$

$$= \lambda_1 \|u\|^2 + \lambda_2 \underbrace{<u, v>}_{0} + \lambda_3 \underbrace{<u, w>}_{0}.$$

(base orthonormée)

D'où $\lambda_1 = 0$.

d'où $n_{12} = 0$

même raisonnement pour w. $n_{13} = 0$

24.d)

/