Copie anonyme - n°anonymat : 459578

maths (E)
459578
E2-00028

Filière : BIL

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème A

(1) (1a) $R_0(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(R_0 = 1) = \frac{1}{6}$ $\qquad P(R_0 = 4) = \frac{1}{6}$

$P(R_0 = 2) = \frac{1}{6}$ $\qquad P(R_0 = 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(R_0 = 3) = \frac{1}{6}$

(1b) $E(R_0) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

(2) (2a) $X \hookrightarrow Bern\left(\frac{1}{3}\right)$

(2b) $\boxed{E(X) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{3}}$

~~D'après la formule de Koenig~~ $\cancel{Var X = E(X^2) - E(X)^2}$

$\cancel{= \frac{1}{3} - \frac{1}{9}}$

~~car~~ $\cancel{X^2 \hookrightarrow Bern\left(\frac{1}{3}\right)}$ ~~puisque~~ $\cancel{1^2 = 1,\ 0^2 = 0}$.

$\cancel{= \frac{2}{9}}$

juste il me semble

$Var X = p(1-p) = \frac{2}{9}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(3) (3a) $Y \hookrightarrow geo\left(\frac{1}{3}\right)$

(3b) $E(Y) = 3$

(3c) $\mathrm{Var}\, Y =$ ~~[illegible]~~ 2

(4) (4a) $P(S_i) = P(R_{i-1} = R_i)$

$= P(R_{i-1} = R_i \mid R_{i-1} = 0)\, P(R_{i-1} = 0) + P(R_{i-1} = R_i \mid R_{i-1} = 1) \times P(R_{i-1} = 1)$

d'après la formule des probabilités totales puisque R_{i-1} et R_i indépendants et qu'elles forment une partition de l'univers

$= P(R_i = 0)\, P(R_{i-1} = 0) + P(R_i = 1)\, P(R_{i-1} = 1)$

$= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$.

(4b) $P(S_i \cap S_{i+1}) = P\big((R_{i-1} = R_i) \cap (R_i = R_{i+1})\big)$

(4c) P(

(5) (5a) ~~Z = min{ ... }~~

Z ~~décrit~~ met en avant le premier évènement S_i qui se réalise.

(5b) Z est un temps d'attente ; elle mesure ~~le nombre~~ le temps qu'il faut pour avoir le premier $R_i = R_{i-1}$

(6) $P(B=R_0) = P(B=1|R_0=1)P(R_0=1) + P(B=2|R_0=2)P(R_0=2)$
$+ P(B=3|R_0=3)P(R_0=3) + P(B=4|R_0=4)P(R_0=4)$
$+ P(B=5|R_0=5)P(R_0=5)$
$= P(B=1)P(R_0=1) + P(B=2)P(R_0=2) + P(B=3)P(R_0=3)$
$+ P(B=4)P(R_0=4) + P(B=5)P(R_0=5)$ car B et R_0 sont indépendantes

$$= \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(7) $P(V=R_0) = P(V=1)P(R_0=1) + P(V=2)P(R_0=2) + P(V=3)P(R_0=3)$
$+ P(V=4)P(R_0=4) + P(V=5)P(R_0=5)$

$$= \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{6}$$

$$= \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{6}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

(8) (8a) $f(1) = \min\left(\frac{1}{2}, e^{1}\right) = \underline{\frac{1}{2}}$

$f(2) = \min(1, 1) = \underline{1}$

$f(2+\ln(2)) = \min\left(1 + \frac{\ln(2)}{2}, e^{-\ln 2}\right)$

$= \underline{\frac{1}{2}}$

(8b) Soit $g(x) = \frac{x}{2} - e^{2-x}$

$g'(x) = \frac{1}{2} + e^{2-x} > 0$ donc g strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$g(0) = -e^2$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$\exists x \in \mathbb{R}_+ \,/\, g(x) = 0$

Par la stricte croissance, cet x est unique.

donc $\exists! x \in \mathbb{R}_+ \,/\, \frac{x}{2} = e^{2-x}$

Par (8a), cet $x = \underline{2}$.

(8c)

Copie anonyme - n°anonymat : 459578

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(9)(9a) Par la (8), $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{2} \text{ si } x \in [0, 2[\\ f(x) = e^{2-x} \text{ si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

f intégrable sur $[0, 2]$ puisque $f(x) = \frac{x}{2}$ continue

f intégrable sur tout segment de $[2, +\infty[$ puisque $f(x) = e^{2-x}$ l'est.

$\forall \alpha > 0$, $x^\alpha e^{2-x} \sim x^\alpha e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par le théorème des croissances comparées donc en particulier pour $\alpha > 1$, donc $\int^{+\infty} e^{2-x} dx$ a un sens.

Pour que λf soit une densité, il faut que $\int_0^{+\infty} \lambda f(x) dx = 1$.

donc on a $\lambda \left(\int_0^2 \frac{x}{2} dx + \int_2^{+\infty} e^{2-x} dx \right) = 1$

$\iff \lambda \left(\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 + \left[-e^{2-x}\right]_2^{+\infty} \right) = 1$

$\iff \lambda \left(1 + 1 \right) = 1$

$\iff \lambda = \frac{1}{2}$

(9b) $P(N>2) = 1 - P(N \leq 2)$

$$= 1 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

(9c) $P(N>x+2 \mid N>2) = \dfrac{P\left((N>x+2)\cap(N>2)\right)}{P(N>2)}$

$$= 2P(N>x+2)$$

$$= 2\left(1 - P(N \leq x+2)\right)$$

$$= 2 - \int_0^2 \frac{y}{2}\,dy - \int_2^x e^{2-y}\,dy$$ par ~~linéarité~~ la relation de Chasles

$$= 2 - 1 - \left[-e^{2-y}\right]_2^x$$

$$= 2 - 1 + e^{2-x} - 1$$

$$= e^{2-x}$$

(9d) $E(N) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} x e^{2-x}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 + \frac{1}{2}\left[-e^{2-x}x\right]_2^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} -e^{2-x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cancel{\ast} - \frac{1}{2}\left[e^{2-x}\right]_2^{+\infty} = \frac{5}{3}$$

(10c) ~~(10a)~~ (10b) $P(V=1) = \frac{1}{3}$ $P(V=5) = \frac{1}{2}$

$P(V=3) = \frac{1}{6}$

Donc on veut $P(D=1) = \frac{1}{3}$

donc $P(N < a) = \frac{1}{3}$, donc $\frac{1}{2}\int_0^a \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^a = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow a^2 = \frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{8}{3}}$ car $a>0$.

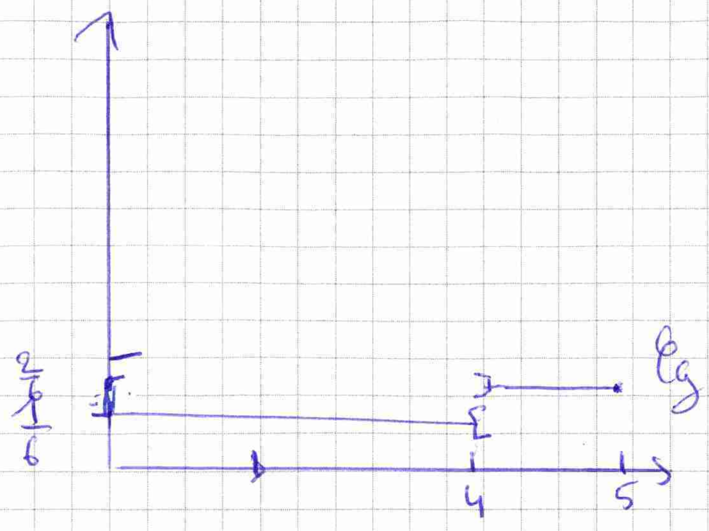
(10 ~~d~~) On veut $P(N \geq b) = \frac{1}{2}$

Par la (9b) $P(N>2) = \frac{1}{2}$.

Or N est une variable à densité, donc elle ne charge aucun point, donc $P(N>2) = P(N\geq 2) = \frac{1}{2}$.

donc $b = \frac{1}{2}$

(11)



Copie anonyme - n°anonymat : 459578

Emplacement QR Code	Filière : BIL	Session : 2024
	Épreuve de : Mathématiques	

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème B

(12) (12 a) $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

(12 b) $g(x) = x - 2e^{-\frac{1}{x}} = x\left(1 - 2\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\right)$

Or $2\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ par le théorème des croissances comparées

donc $g(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \cancel{\infty}\ 0$

(12 c) ~~g(x) est continue dans~~ et ~~en~~ prend des valeurs ~~de 0 à +∞~~.

$2e^{-\frac{1}{x}}$ ne s'annule jamais, donc on ~~a~~ n'a jamais $g(x) = x$, donc ~~de~~ le graphe de g n'intersecte pas la droite $y = x$.

Cependant, si on prolonge g par continuité à droite en 0, alors $g(0) = 0$

Donc le graphe de g intersecte $y = x$ en 0 si on prolonge.

(13) (13 a) $\cancel{\ln}$ $\ln(t) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$

$$h(t) = \ln(t) - t = t\Big(\underbrace{\frac{\ln(t)}{t}}_{\substack{\to 0 \\ t\to+\infty}}\text{ par TCC} - 1\Big) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

(13 b) h est composée de fonctions dérivables donc est dérivable

$$h'(t) = \frac{1}{t} - 1$$

(13 c)

	0		1		+∞
$h'(t)$		+	0	−	
$h(t)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

$h'(1) = 0$

$h(1) = -1$

(13 d) $\ln(2t) - t = \ln 2 + \ln t - t \leq \ln 2 - 1 < 0$

donc $\ln(2t) - t < 0 \iff \underline{\ln(2t) < t}$

(13 e) ~~$U_{n+1} - U_n = u_n - 2e^{-\frac{1}{u_n}} - u_n = -2e^{-\frac{1}{u_n}} < 0$~~

~~u_n décroissante et minorée donc elle a une limite~~

(14 c)

(14) (14a) Pour que u_n soit définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

$u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donc $u_0 \neq 0$.

On suppose $u_n \neq 0$

$u_{n+1} = u_n - 2e^{-\frac{1}{u_n}}$. Or par la (13e), on sait que

~~car~~ $g(x) > 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ donc $u_{n+1} \neq 0$.

Donc $\forall n$, $u_n \neq 0$ donc u_n est définie $\forall n \in \mathbb{N}$.

(14b) $g(l) = l \iff l = 0$ par la (12)

et (14c)
De plus, $u_{n+1} - u_n = -e^{-\frac{1}{u_n}} < 0$.

(u_n) décroissante et minorée, donc elle admet une limite, et cette seule limite possible est 0.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

(15) (15a) $\frac{1}{1-s} = s + o(s)$

(15b)

(15e) $U_n^{\cancel{+\infty}\,\alpha} - U_0^{\cancel{\alpha}} \sim U_n^{-\alpha}$ donc $|U_n^{-\alpha}| \leq 2\varepsilon n$

$\Leftrightarrow \frac{|U_n^{-\alpha}|}{n} \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

donc $U_n^{-\alpha} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

(16)(16a) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = x - \frac{1}{x^2} y e^{-\frac{1}{x}}$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = - e^{-\frac{1}{x}}$

(16b)

Copie anonyme - n°anonymat : 459578

Emplacement QR Code

Filière : BIL

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème C

(18) (18a) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$p\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right) = p\left(\begin{pmatrix}\lambda x+\mu x'\\ \lambda y+\mu y'\\ \lambda z+\mu z'\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}-\lambda y-\mu y'\\ \lambda z+\mu z'\\ -\lambda x-\mu x'\end{pmatrix}$$

$$= \lambda\begin{pmatrix}-y\\z\\-x\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-y'\\z'\\-x'\end{pmatrix}$$

$$= \lambda p\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) + \mu p\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)$$

Donc p est linéaire

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} p\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & p\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & p\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}(1,0,0)\\(0,1,0)\\(0,0,1)\end{array} \end{array}$$

(18b) $$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la même manière, $AA^T = I_3$.

Donc A est inversible.

(19) (19 a) $p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} -y \\ z \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} -y = x \\ z = y \\ -x = z \end{cases}$ $\cancel{\iff \begin{cases} z = y \\ -x = z \end{cases}}$

Cela fonctionne pour $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $p\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(19 b) $\langle v_1, v_2 \rangle = -2 + 1 + 1 = 0$.

(19 c) $\|v_2\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

Pour $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, on a bien $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$

$\langle v_3, v_2 \rangle = 0$

et $\|v_3\| = \|v_2\|$

(19 d) Soit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$\iff \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \sqrt{3}\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{3}\lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\iff \begin{cases} \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2} \\ \frac{3\lambda_1}{2} = -\sqrt{3}\lambda_3 \\ \frac{3\lambda_1}{2} = \sqrt{3}\lambda_3 \end{cases}$ $\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

Donc (v_1, v_2, v_3) est libre.
On a 3 vecteurs libres en dim 3 donc ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.

(19 e) $p(v_2) = \alpha v_2 + \beta v_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \alpha 2 \cancel{+\beta} \\ 1 = \alpha + \beta\sqrt{3} \\ -1 = \alpha \cancel{+} - \beta\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \beta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$p(v_3) = \gamma v_2 + \delta v_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} = 2\gamma \cancel{+} \\ -\sqrt{3} = \gamma + \sqrt{3}\delta \\ 0 = \gamma \cancel{+} - \sqrt{3}\delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \delta = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} = \delta \end{cases}$$

(19 f) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $(-1, 1, 1)$ $(2, 1, 1)$ $(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$

(19 g) cas pour $\theta = \frac{4\pi}{3}$, on a $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

pb!

Copie anonyme - n°anonymat : 459578

Emplacement QR Code

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

(20) (20a) $\cancel{(C^T + I_3)C = I_3 + C}$

(20b) $(C^T + I_3)(C - I_3) = I_3 - C^T + C - I_3$

$= C - C^T$

(20c)

(20d)

(21)

(22) (22a) $(H_v)^T = \left(2\dfrac{vv^T}{\|v\|^2} - I_3 \right)^T$

$= 2\dfrac{(vv^T)^T}{\|v\|^2} - I_3$ par linéarité

$= 2\dfrac{v^{TT}v^T}{\|v\|^2} - I_3$

$= 2\dfrac{vv^T}{\|v\|^2} - I_3 = H_v$

$$H_v \cancel{v} = \left(2 \frac{vv^T}{\|v\|^2} - I_3\right) v$$

$$= 2 \frac{vv^Tv}{\|v\|^2} - I_3 v$$

$$= 2v - I_3 v = v.$$

$$(H_v)^T H_v = H_v^2 = \left(4 \frac{v^2(v^T)^2}{\|v\|^4} - 4 \frac{vv^T}{\|v\|^2} - I_3 \right)$$

(E2b) $H_v x = y \Leftrightarrow y = \cancel{A}\, 2 \frac{vv^T x}{\|v\|^2} - \cancel{I} x$

(E3) (E3a) $H_{x+y}\, x = 2 \frac{(x+y)(x+y)^T x}{\|x+y\|^2} - x$

$$= 2 \frac{(x+y)(x^T+y^T)x}{\|x+y\|^2} - x$$

$$= 2 \frac{(xx^T + xy^T + yx^T + yy^T)x}{\|x+y\|^2} - x$$

(23 b)

(24) (24a) $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.

Donc si $\langle u, v \rangle = 0$, $\langle \varphi(u), v \rangle = 0$.

(24b) Soit $y \in \varphi(E_1^\perp)$.

Soit x, $\varphi(x) = y$ et $x \in E_1^\perp$.
Soit $x' \in E_1$.

$\langle y, x' \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(x') \rangle = \langle x, x' \rangle = 0$.

Donc $y \in E_1^\perp$.

Donc $\varphi(E_1^\perp) \subset E_1^\perp$

(24c)