Copie anonyme - n°anonymat : 806025

V0-00008
806025
maths (E)

Filière : BIL

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème A

1a On a $R_0(\Omega) = [1,5]$ et

$\mathbb{P}(R_0=1) = \mathbb{P}(R_0=2) = \mathbb{P}(R_0=3) = \mathbb{P}(R_0=4) = \frac{1}{6}$

et $\mathbb{P}(R_0=5) = \frac{1}{3}$ par équiprobabilité.

1b On a

$$\mathbb{E}(R_0) = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{3}$$
$$= \frac{10}{3}.$$

2a On a $X(\Omega) = \{0,1\}$

et $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(R_0=5) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-\mathbb{P}(X=1) = \frac{2}{3}$.

2b Puisque $X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$.

3a On a $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ car Y prend la valeur du 1er lancer où ~~R~~ on obtient 5, ce qui se produit avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

3b On a $\mathbb{E}(Y) = 3$.

3c On a $\mathbb{V}(Y) = \frac{9}{8}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4a Soit i fixé.

On a $\underline{P(S_i)} = P(R_{i-1} = R_i) = P\big((R_{i-1}=1 \cap R_i=1) \cup (R_{i-1}=2 \cap R_i=2) \cup (R_{i-1}=3 \cap R_i=3) \cup (R_{i-1}=4 \cap R_i=4) \cup (R_{i-1}=5 \cap R_i=5)\big) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$, par incompatibilité et par indépendance des lancers

$= \frac{2}{9}$.

4b Les évènements ~~sont indépendants~~ ne sont pas indépendants car si on a obtenu une même valeur aux lancers 0 et 1 la probabilité d'obtenir une valeur identique aux lancers 1 et 2 qui soit différente de celle des lancers 0 et 1 est nulle.

On a

$\underline{P(S_2 | S_1)} = P\big((R_1 \leq 4 \cap R_2 \leq 4) \cup (R_1 = 5 \cap R_2 = 5) \,|\, ((R_0 \leq 4 \cap R_1 \leq 4) \cup (R_0 = 5 \cap R_1 = 5))\big)$

$= P((R_1 \leq 4 \cap R_2 \leq 4) \cup (R_1 = 5 \cap R_2 = 5) | R_1 \leq 4)$

$+ P((R_1 \leq 4 \cap R_2 \leq 4) \cup (R_1 = 5 \cap R_2 = 5) | R_1 = 5)$ par incompatibilité

$= P(R_1 \leq 4 \cap R_2 \leq 4) + P(R_1 = 5 \cap R_2 = 5)$

$= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{9} \neq P(S_2) = \frac{2}{9}$.

4c Calculons $P(R_1 = 5 | S_2)$.

~~$P(R_1 = 5 | S_2) = P(R_1 = 5 | R_2 = R_1) = P(R_1 = 5 | (R_1 \leq 4 \cap R_2 \leq 4) \cup (R_1 = 5 \cap R_2 = 5))$~~

$= P(R_1 = 5 | R_1 \leq 4) + P(R_1 = 5 | R_1 = 5)$

$\underline{P(R_1 = 5 | S_2)} = \frac{P(R_1 = 5 \cap S_2)}{P(R_1 = 5)} = \frac{P(S_2 | R_1 = 5) P(S_2)}{P(R_1 = 5)}$

par la formule de Bayes

$$= \frac{\mathbb{P}(R_0 = 5 \cap R_1 = 5) \times \frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}$$ par indépendance

$$= \frac{4}{9}.$$

(5a) Z représente le plus petit i tel que S_i est réalisé ($i \in \mathbb{N}^*$) donc on peut écrire Z comme :

$$S_1 \cup (S_2 | \overline{S_1}) \cup (S_3 | \overline{S_2} \cap \overline{S_1}) \ldots$$

(5b) Z ne peut pas suivre une loi géométrique car les expériences réalisées successivement ne sont pas indépendantes (question 4b) et donc la probabilité de succès varie.

(6) On a

$$\mathbb{P}(B = R_0) = \mathbb{P}\big((B=1 \cap R_0=1) \cup (B=2 \cap R_0=2) \cup (B=3 \cap R_0=3) \cup (B=4 \cap R_0=4) \cup (B=5 \cap R_0=5) \cup (B=6 \cap R_0=6)\big)$$

$$= 4 \times \frac{1}{36} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + 0$$ par indépendance des dés et incompatibilité

$$= \frac{1}{6}.$$

(7) De même, on a

$$\mathbb{P}(V = R_0) = \mathbb{P}\big((V=1 \cap R_0=1) \cup (V=3 \cap R_0=3) \cup (V=5 \cap R_0=5)\big)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$ par incompatibilité et indépendance

$$= \frac{1}{4}.$$

(8a) On a $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = 1$ et $f(2 + \ln 2) = 1 + \frac{\ln 2}{2}$.

(8b) On a $x = 2$ qui vérifie l'équation.

9a) On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} \frac{x}{2}\,dx + \int_{2}^{+\infty} e^{2-x}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4}\right]_{0}^{2} + \left[-e^{2-x}\right]_{2}^{+\infty}$$

$$= 1 - 0 + 0 + 1 = 2$$

On en déduit que λ, la constante de normalisation de f, doit valoir $\frac{1}{2}$.

9b) On a

$$P(N>2) = \int_{2}^{+\infty} \frac{f(x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{+\infty} e^{2-x}\,dx = \frac{1}{2}.$$

9c) On a, soit $x \in \mathbb{R}_+$,

$P(N>$

Copie anonyme - n°anonymat : 806025

Emplacement QR Code

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème B

12a On a $g(x) = x - 2e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

12b On a $g(x) = x - 2e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ car $e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

12c Etudions $f : x \mapsto g(x) - x$.

On a $f(x) = -2e^{-\frac{1}{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\boxed{f'(x) = \frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}$.

Or $f'(x) \geq 0$ pour tout x. Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $f(x) \geq 0$ pour tout x d'où $g(x) \geq x$ et le graphe de g n'intersecte pas la droite d'équation $y = x$.

13a On a

$\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (\ln(t) - t) = -\infty$ par croissance comparée.

et $\lim\limits_{t\to 0^+} h(t) = -\infty$.

13b h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\boxed{h'(t) = \frac{1}{t} - 1}$.

13c Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $h'(t) \geq 0 \iff t \leq 1$. On en déduit le tableau de variation suivant :

t	0		1		$+\infty$
h			-1		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

car $h(1) = -1$.

13d On pose $j : t \mapsto \ln(2t) - t$. j est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour la même raison que h et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ $\boxed{j'(t) = \frac{1}{2t} - 1}$. Or $j'(t) \geq 0 \iff t \leq \frac{1}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que j est croissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$. Or $j\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$.

D'où $j(t) < 0$ pour tout t et alors $\ln(2t) < t$.

13e

14a Montrons que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

~~On a $u_0 > 0$. Si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = u_n - 2e^{-\frac{1}{u_n}} > 0$ car $u_n > 0$ et~~

~~Pour cela, on montre que $u_n > 2e^{-\frac{1}{u_n}}$ quel que soit n.~~

~~On a~~

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car ~~elle se note~~ on a $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) > x$ pour tout x d'après la question 12c. De plus, $u_0 > 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs et est ainsi bien définie.

14b

14c On a l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par unicité de la limite on peut écrire que $l = l - 2e^{-\frac{1}{l}}$ i.e. $e^{-\frac{1}{l}} = 0$

~~i.e. $e^{\frac{1}{l}} = 1$ i.e.~~

Le calcul n'aboutit pas.

15a On a, soit $s\in\mathbb{R}$,

$$(1-s)^{-\alpha} \underset{s\to 0}{=} 1 - s(-\alpha) + o(x) = 1 + \alpha x + o(x).$$

15b

16a On a, soit x et $y \in \mathbb{R}_+^*$,
$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 1 \cancel{*} \frac{y}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}$ et $\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -e^{-\frac{1}{x}}}$.

17a Posons $t = \frac{1}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On a alors $F(x,y) = F\left(\frac{1}{t}, y\right) = \frac{1}{t} - y e^{-t} = 0$
d'où $\frac{1}{t} = y e^{-t}$ i.e. $-\ln(ty) = -t$ i.e. $\ln t - t = -\ln y$.

<u>On a donc bien une équation du type $h(t) = r$ avec $r = -\ln y$.</u>

17b D'après le tableau de variation de h de la question 13c et d'après le <u>théorème</u> ~~des valeurs intermédia~~ <u>de la bijection</u> (h étant strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$) :

- l'équation admet une solution si $r = -1$
- l'équation admet 2 solutions si $r < -1$
- l'équation admet 0 solution si $r > -1$.

Copie anonyme - n°anonymat : 806025

Filière : BIL

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

17c Puisque $x = -\ln y$, on en déduit que $F(x,y)=0$ admet :

- 1 solution si $y=0$
- 2 solutions si $y<0$
- 0 solution si $y>0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/

/

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 019 711

Copie anonyme - n°anonymat : 806025

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Problème C

18a Soient (x,y,z) et $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $p((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) = p((x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z'))$
$= (-y-\lambda y', z+\lambda z', -x-\lambda x') = (-y,z,-x)+\lambda(-y',z',-x')$
$= p(x,y,z)+\lambda p(x',y',z')$
d'où p est bien une application linéaire.

On a en outre $\operatorname{mat}_{BC} p = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18b On a $A^TA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = A^T$.

19a On a

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} -y = y \\ z = z \\ -x = x \end{cases}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $S(A)$ contient 1, donc $1 \in Sp(p)$ et ~~$v_1 = (0,0,1)$~~. $v_1 = (-1,1,1)$ car on remarque que $p(-1,1,1) = (-1,1,1)$.

19b On a $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle (-1,1,1),(2,1,1)\rangle = 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

19c On cherche v_3 tel que :

$$\begin{cases} \langle v_3, v_2 \rangle = 0 \\ \langle v_3, v_1 \rangle = 0 \\ \|v_3\| = \|v_2\| \end{cases}.$$

Soit $v_3 = (x, y, z)$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{6} \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} 3x = 0 \\ y + z = 0 \\ \cancel{x^2} + y^2 + z^2 = 6 \end{cases} \text{ car } x^2+y^2+z^2 \geq 0$$

$$\text{i.e } \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ 2y^2 = 6 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} x = 0 \\ z = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}.$$

On a donc $v_3 = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

19d On a $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$, $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$ donc la famille (v_1, v_2, v_3) est orthogonale. Elle est donc libre. De plus, elle comporte trois vecteurs dans une espace de dimension 3, elle forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

19e Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

On a :

$$p(v_e) = \alpha v_2 + \beta v_3 \overset{\text{i.e.}}{\Leftrightarrow} (-1, 1, -2) = \alpha(2, 1, 1) + \beta(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$$
$$= (2\alpha, \alpha + \beta\sqrt{3}, \alpha - \beta\sqrt{3})$$

$$\text{i.e. } \begin{cases} 2\alpha = -1 \\ \alpha + \beta\sqrt{3} = 1 \\ \alpha - \beta\sqrt{3} = -2 \end{cases} \text{ i.e. } L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ 2\alpha = -1 \\ \sqrt{3}\beta = 1 - \alpha \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \beta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \cancel{\frac{1}{2\sqrt{3}}}\ \frac{\sqrt{3}}{2}$.

De même, on a :

$\rho(v_3) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0) = \gamma v_2 + \delta v_3 = (2\gamma, \gamma + \delta\sqrt{3}, \gamma - \delta\sqrt{3})$

i.e. $\begin{cases} 2\gamma = -\sqrt{3} \\ \gamma + \delta\sqrt{3} = -\sqrt{3} \\ \gamma - \delta\sqrt{3} = 0 \end{cases}$ $\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\text{i.e.}}$ $\begin{cases} \gamma = -\sqrt{3}/2 \\ \gamma = -\sqrt{3}/2 \\ \delta = \frac{-\gamma}{-\sqrt{3}} \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \gamma = -\sqrt{3}/2 \\ \delta = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Ainsi, $\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overset{\delta}{\cancel{\beta}} = -\frac{1}{2}$.

19f) On a

$$\underset{(v_1,v_2,v_3)}{\operatorname{mat}} \rho = B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \rho(v_1)\ \ \rho(v_2)\ \ \rho(v_3) \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

car $\rho(v_1) = v_1$, $\rho(v_2) = -\frac{1}{2} v_2 + \cancel{\frac{1}{2\sqrt{3}}}\,{}^{\sqrt{3}/2}\, v_3$ et $\rho(v_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_2 - \frac{1}{2} v_3$.

19g) On a $\theta \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ car $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où le réel $-\frac{2\pi}{3}$ convient.

20a) Si $-1 \notin S(C)$, alors $\operatorname{Ker}(C^T + I_3) = \{0\}$ donc $C^T + I_3$ est inversible.

20b) On a $(C^T + I_3)(C - I_3) = C^T C + C - C^T + I_3 = C - C^T$.

20c) Soit $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$.

Alors $C - C^T = \begin{pmatrix} 0 & b-d & c-g \\ d-b & 0 & f-h \\ g-c & h-f & 0 \end{pmatrix}$. On a alors bien

$C - C^T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ en posant $b - d = a$, $c - g = b$ et $f - h = c$.

20d On a

$\text{Ker}(C-C^T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : \begin{cases} ay+bz=0 \\ -ax+cz=0 \\ -bx-cy=0 \end{cases} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} y = -\frac{b}{a} z \\ x = \frac{c}{a} z \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{c}{a} z \\ -\frac{b}{a} z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ -\frac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ainsi, $\text{Ker}(C-C^T) \neq \{0\}$.

20e

21

22a On a,

$(H_V)^T = \left(\frac{2VV^T}{\|V\|^2} - I_3 \right)^T = \frac{2V^TV}{\|V\|^2} - I_3$ par linéarité

$= H_V$ car $VV^T = V^TV$ puisque $V \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$.

$H_V V = \left(\frac{2VV^T}{\|V\|^2} - I_3 \right) V = \frac{2V^2V^T}{\|V\|^2} - V = \frac{V(2VV^T - \|V^2\| I_3)}{\|V\|^2}.$

$(H_V)^T H_V = H_V^2 = \left(2\frac{VV^T}{\|V\|^2} - I_3 \right)\left(\frac{2VV^T}{\|V\|^2} - I_3 \right)$

$= \frac{4V^2V^{T^2}}{\|V\|^4} - \frac{4VV^T}{\|V\|^2} + I_3.$

24a Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\langle x, u \rangle = 0$.
Alors $\langle \varphi(x), \varphi(u) \rangle = \langle x, u \rangle = 0$. Or $\varphi(u) = u$ car $u \in E_1$. Donc $\langle \varphi(x), u \rangle = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Copie anonyme - n°anonymat : 806025

Emplacement QR Code

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

24b Soit $y \in \varphi(E_1^\perp)$.

Alors il existe un $x \in E_1^\perp$ tel que $y = \varphi(x)$.

Posons $z \in E_1$. On a $\langle x, z \rangle = 0$ car $z \in E_1$ et $x \in E_1^\perp$.

Alors $\langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle = 0$ car φ vérifie $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

i.e. $\langle y, \varphi(z) \rangle = 0$.

Ainsi, on a bien $\langle y, a \rangle = 0$ pour tout $a \in E_1$.

D'où $y \in E_1^\perp$. On en déduit que $\varphi(E_1^\perp) \subset E_1^\perp$.

24c On a $m_{11} = 1$, $m_{21} = 0$ et $m_{31} = 0$ car $\varphi(u) = u$ car $u \in E_1$. De plus, $\langle u, v \rangle = 0$ et $\langle u, w \rangle = 0$ car (u, v, w) est orthonormée, donc $\langle \varphi(v), u \rangle = 0$ et $\langle \varphi(w), w \rangle = 0$ par la question 24a. Ainsi, $m_{12} = m_{13} = 0$.

24d On a

$$\begin{pmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{22}^2 + m_{32}^2 & m_{22}m_{23} + m_{32}^2 \\ m_{22}m_{23} + m_{32}m_{33} & m_{23}^2 + m_{33}^2 \end{pmatrix}.$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 019 711

/