Copie anonyme - n°anonymat : 110618

Z2-00031 110618 maths (E)

Filière : BL
Session : 2024
Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

PROBLÈME B.

12.a. $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} -2e^{-\frac{1}{x}} = -2$ par composition

donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

12.b. $\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+} -2e^{-\frac{1}{x}} = 0$ par composition

donc $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$

12.c. On pose $h(x) = g(x) - x$

$h(x) = -2e^{-\frac{1}{x}}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-2e^{-\frac{1}{x}} < 0$ donc $h(x) < 0$

Donc la courbe représentative de g n'intersecte pas la droite d'équation $y = x$

13.a. $\lim_{t\to 0^+} \ln(t) - t = -\infty$

et $\lim_{t\to+\infty} \ln(t) - t = \lim_{t\to+\infty} t\left(-1 + \underbrace{\frac{\ln(t)}{t}}_{\to 0}\right)$

donc $\lim_{t\to+\infty} h(t) = -\infty$

13.b. ~~$h(t)$~~ est une somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ donc h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$h'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$

13.c. $h'(t) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{1-t}{t} \geqslant 0$ or $\forall t > 0$

donc $h'(t) \geqslant 0 \Rightarrow 1-t \geqslant 0 \Rightarrow 1 \geqslant t > 0$. On a alors le tableau de variation suivant.

t	0		1		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

$h(1) = \ln(1) - 1 = -1$

13.d. $\ln(2t) < t \Rightarrow \ln(2) + \ln(t) - t < 0 \Rightarrow h(t) < -\ln(2)$

Or $\ln(2) < 1 \Leftrightarrow -\ln(2) > -1$

Le tableau de variation nous montre que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$,

$h(t) < -1 < -\ln(2)$

13.e. $g(x) > 0 \Rightarrow x > 2e^{-\frac{1}{x}}$ $\quad x > 0$ et $2e^{-\frac{1}{x}} > 0$ donc :

$\Rightarrow \ln(x) > \ln(2) + \ln(e^{-\frac{1}{x}})$

$\Rightarrow \ln(x) - \ln(2) > -\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right) > -\frac{1}{x}$

$\Rightarrow -\ln\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \ln\left(2 . \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$ donc la propriété trouvée en 13.d peut être appliquée. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) > 0$

14.a. Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$. En itérant, on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{u_n\}$ est bien défini

14.b. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = -2e^{-\frac{1}{u_n}} < 0$

donc (u_n) est décroissante.

De plus $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ donc $u_n > 0$.

(u_n) est strictement monotone et bornée donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) admet bien une limite qu'on note l.

14.c. En passant à la limite, on obtient :

$$l = l - 2e^{-\frac{1}{l}} \Leftrightarrow 0 = -2e^{-\frac{1}{l}}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{l}} = 0 \Rightarrow \lim_{l \to +\infty} -\frac{1}{l} = -\infty$$

donc on a bien $l = 0$.

15.a. $(1-s)^{-\alpha} = 1 + -\alpha \times (-s) + o(-s) = 1 + \alpha s + o(-s)$

15.b. $\lim_{k \to +\infty} \frac{2}{u_k} = 0$ et $\lim_{k \to +\infty} e^{-\frac{1}{u_k}} = 0$

donc par composition de limites,

$\lim_{k \to +\infty} 2u_k^{-1} e^{-\frac{1}{u_k}} = 0$.

15.c. $u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha} = (u_k - 2e^{-\frac{1}{u_k}})^{-\alpha} - u_k^{-\alpha}$

$= \{ u_k^{-\alpha} (1 - \frac{2}{u_k} e^{-\frac{1}{u_k}})^{-\alpha} - u_k^{-\alpha}$) car $\frac{2}{u_k} e^{-\frac{1}{u_k}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$= u_k^{-\alpha} \times (\alpha . \frac{2}{u_k} e^{-\frac{1}{u_{k+1}}}) u_k^{-\alpha}$

$= u_k^{-\alpha} (\alpha . \frac{2}{u_k} e^{-\frac{1}{u_{k+1}}} - 1)$

$u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha} = u_k^{-\alpha} . (\alpha . \frac{2}{u_k} e^{-\frac{1}{u_k}})$

Or on a vu que $\lim_{k \to +\infty} \frac{2}{u_k} e^{-\frac{1}{u_k}} = 0$

donc $u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.

16.a. $\partial_1 F(x,y) = \underline{1 - y \times \frac{1}{x^2} \times e^{-\frac{1}{x}}}$

$\partial_2 F(x,y) = \underline{-e^{-\frac{1}{x}}}$

16.b. $\begin{cases} \partial_1 (F(x,y)) = 0 \\ \partial_2 (F(x,y)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{y}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x \to 0^+$ or si $x \to 0$ $\partial_1 \neq 0$ donc

F n'a pas d'extremum local.

17.a. $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$

Donc $F(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{1}{t} - ye^{-t} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{t} = e^{-t} . y$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \ln(e^{-t}) + \ln(y)$

$\Rightarrow -\ln(y) = -t - \ln\left(\frac{1}{t}\right)$

$\Rightarrow -\ln(y) = \ln(t) - t$

$\Rightarrow \underline{r = h(t)}$ (A) avec $\underline{r = -\ln(y)}$

17.b. $h(t) \in]-\infty;-1]$. Donc si $\underline{r \in]-1;+\infty[}$, (A) n'a <u>pas de solution</u>.

Si $\underline{r \in]-\infty;-1]}$, comme $h(t)$ est strictement croissante sur $]0;1]$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, d'après le théorème de la bijection, (A) a <u>deux solutions</u>.

17.c $r = -\ln(y)$. Si $r > -1$ alors :

$-\ln(y) > -1$

$\Rightarrow \ln(y) < 1$

$\Rightarrow y < e^1$

Si $r < -1$, $y > e$

Donc $F(x,y)$ n'a <u>pas de solutions si $y < e^1$</u> et en a <u>2 si $y > e$</u>.

Copie anonyme - n°anonymat : 110618

Emplacement QR Code

Filière : BCL

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

PROBLÈME A.

1.a. • $\mathbb{P}(R_0 = 1) = \mathbb{P}(R_0 = 2) = \mathbb{P}(R_0 = 3) = \mathbb{P}(R_0 = 4) = \frac{1}{6}$

• $\mathbb{P}(R_0 = 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

1.b. $\mathbb{E}(R_0) = 1 \times \mathbb{P}(R_0 = 1) + 2 \times \mathbb{P}(R_0 = 2) + 3 \times \mathbb{P}(R_0 = 3) + 4 \times \mathbb{P}(R_0 = 4) + 5 \times \mathbb{P}(R_0 = 5)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{3}$$

$$\mathbb{E}(R_0) = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

2a. $X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$ car $X \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(R_0 = 5))$

2b. $\mathbb{E}(X) = 0 \times (\mathbb{P}([R_0 = 1] \cup [R_0 = 2] \cup [R_0 = 3] \cup [R_0 = 4]) + 1 \times \mathbb{P}(R_0 = 5)$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{V}(X) = 0^2 + 1^2 \times \mathbb{P}(R_0 = 5) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

3.a. Y correspond au premier lancer où on obtient cinq. Y suit donc une loi géométrique de paramètre

$$\mathbb{P}(R_i = 5) = \frac{1}{3}$$

3.b. $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3.c. $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{2/3}{1/9} = \underline{6}$

4.a. $\mathbb{P}(S_i) = \mathbb{P}([R_i=1]\cap[R_{i-1}=1]) + \mathbb{P}([R_i=2]\cap[R_{i-1}=2])$
$+ \mathbb{P}([R_i=3]\cap[R_{i-1}=3]) + \mathbb{P}([R_i=4]\cap[R_{i-1}=4])$
$+ \mathbb{P}([R_i=5]\cap[R_{i-1}=5])$

Or les événements R_i et R_{i-1} sont indépendants.
Donc on a :

$$\mathbb{P}(S_i) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(S_i) = \frac{4}{36} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \underline{\frac{2}{9}}$$

4.b. $\mathbb{P}_{S_2}(R_1=5) = \dfrac{\mathbb{P}(S_2\cap[R_1=5])}{\mathbb{P}(S_2)}$

Or si S_2 est réalisé <u>et</u> que $R_1=5$, alors cela veut dire que $R_2=5$. Donc :

$$\mathbb{P}_{S_2}(R_1=5) = \frac{\mathbb{P}([R_2=5]\cap[R_1=5])}{\mathbb{P}(S_2)} = \frac{1/3\times 1/3}{2/9} = \underline{\frac{1}{2}}$$

5.a. Z est <u>le premier lancer où l'événement S_i est réalisé</u>.

5.b. Comme il n'y a pas de lancer R_0, l'événement S_1 ne peut pas être réalisé et donc l'événement $[Z=1]$ non plus. Or le support d'une loi géométrique est $\mathbb{N}^*$ et non $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Donc <u>$Z$ ne suit pas une loi géométrique</u>.

6. $\mathbb{P}([R_0 = k] \cap [B = k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 6 \\ \frac{1}{36} & \text{si } k \in [\![1, 4]\!] \\ \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} & \text{si } k = 5 \end{cases}$ car R_0 et B sont indépendantes

Donc $\mathbb{P}(R_0 = B) = 0 + \frac{4}{36} + \frac{1}{18} = \underline{\frac{1}{6}}$

7. $\mathbb{P}([V = k] \cap [R_0 = k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \{2; 4; 6\} \\ \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} & \text{si } k = 3 \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} & \text{si } k = 5 \end{cases}$

Donc $\mathbb{P}(V = R_0) = \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{6} = \frac{2+1+6}{36} = \underline{\frac{1}{4}}$

8.a. $e^{2-1} = e > 1 > \frac{1}{2}$. Donc $\underline{f(1) = \frac{1}{2}}$

$e^{2-2} = 1 = \frac{2}{2}$. Donc $\underline{f(2) = 1}$.

$e^{2-2-\ln(2)} = e^{\ln(1/2)} = \frac{1}{2} < 1 + \frac{\ln(2)}{2} = \frac{2 + \ln(2)}{2}$

Donc $\underline{f(2 + \ln(2)) = \frac{1}{2}}$

8.b. On pose $h(x) = \frac{x}{2} - e^{2-x}$

h est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$h'(x) = \frac{1}{2} + e^{2-x}$ $\quad h'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

↳ donc h est strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$

$h(0) = -e^2 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

Donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel tel que :

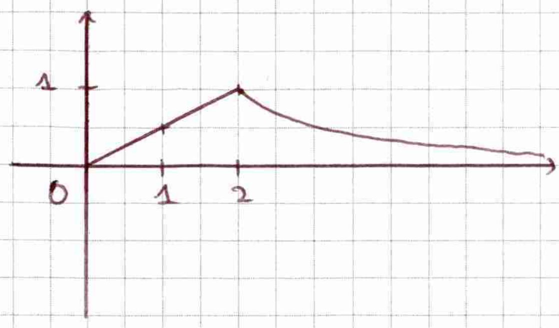
$h(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = e^{2-x}$

On a vu en 8.a. que ce réel est $\underline{2}$.

8.c. Sur $x \in [0; 2]$, $\frac{x}{2} < e^{2-x}$ donc le graphe de f se confond avec celui de $\frac{x}{2}$.

Sur $x \in [2; +\infty[$, $\frac{x}{2} > e^{2-x}$ donc le graphe de f se confond avec celui de e^{2-x}.

On obtient alors :



9 a. Si λf est une densité alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \lambda \frac{x}{2}\,dx + \int_2^{+\infty} \lambda e^{2-x}\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \lambda\left[-e^{2-x}\right]_2^{+\infty} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{4}{2} - 0 + \lambda \cdot \lim_{x\to+\infty} -e^{2-x} + \lambda e^{2-2} = 1$$

$$\Rightarrow \lambda + \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

9 b. $\mathbb{P}(N>2) = \int_2^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = \lambda = \frac{1}{2}$

9 c. $\mathbb{P}_{[N>2]}(N>x+2) = \dfrac{\mathbb{P}([N>x+2]\cap[N>2])}{\mathbb{P}(N>2)} = \dfrac{\mathbb{P}(N>x+2)}{\mathbb{P}(N>2)}$

Or $\mathbb{P}(N>x+2) = \int_{x+2}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{2-t}\,dt$

$$= \frac{1}{2}\left[-e^{2-t}\right]_{x+2}^{+\infty}$$

$$\mathbb{P}(N>x+2) = \frac{1}{2}e^{-x}$$

Donc $\mathbb{P}_{[N>2]}(N>x+2) = \dfrac{1/2\, e^{-x}}{1/2} = e^{-x}$

9d. $\mathbb{E}(N) = \int_0^2 \frac{x^2}{4}\,dx + \int_2^{+\infty} \frac{x}{2} e^{-x+2}\,dx$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x}{2}\cdot(-e^{2-x})\right]_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \frac{1}{2} e^{2-x}\,dx$$

$$\mathbb{E}(N) = \frac{4}{3} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{8}{6} + \frac{6}{6} + \frac{3}{6} = \frac{17}{6}$$

10.a. Si D et V ont la même loi, alors :

$\mathbb{P}(D=1) = \frac{1}{3}$; $\mathbb{P}(D=3) = \frac{1}{6}$; $\mathbb{P}(D=5) = \frac{1}{2}$

Copie anonyme - n°anonymat : 110618

Emplacement QR Code

Filière : BL

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

PROBLÈME A (SUITE)

On voit alors que $\mathbb{P}(D=5) = \mathbb{P}(N > b) = \frac{1}{2}$

Or on avu que $\mathbb{P}(N>2) = \frac{1}{2}$

Donc $b = 2$

10.b. De même, on doit avoir $\mathbb{P}(0 \leq N \leq a) = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(N \leq a) - \mathbb{P}(N \leq 0) = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(N \leq a) = \frac{1}{3}$ Comme $a < b = 2$:

$\Rightarrow \int_0^a \frac{1}{4} x \, dx = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow a^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{8}{3}}$ car $a > 0$

$\frac{8}{3} < \frac{9}{3} = 3$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{8}{3}} < \sqrt{3} < 2$

Donc on a bien $a < b$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/

Copie anonyme - n°anonymat : 110618

Filière : B/L	Session : 2024
Épreuve de : Mathématiques	

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

PROBLÈME C.

18.a. Soit $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\rho(\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2))$$
$$= \rho((\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2)$$
$$= (-\lambda y_1 - y_2, \lambda z_1 + z_2, -\lambda x_1 - x_2)$$
$$= \lambda(-y_1, z_1, -x_1) + (-y_2, z_2, -x_2)$$
$$= \lambda\rho(x_1, y_1, z_1) + \rho(x_2, y_2, z_2)$$

Donc ρ est bien linéaire

$$\rho(1,0,0) = (0,0,-1) = -e_3$$
$$\rho(0,1,0) = (-1,0,0) = -e_1$$
$$\rho(0,0,1) = (0,1,0) = e_1$$

Donc on a : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

18.b. $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A^TA =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\times -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1\times -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $A^TA = I_3$ or $I_3 \times I_3 = I_3$ donc A^TA est inversible.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

19.a. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tq :

$$AX = X \Rightarrow \begin{cases} -y = x \\ z = y \\ -x = z \end{cases} \qquad X = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc 1 est bien valeur propre de p car $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, associée à $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

19.b. $\langle v_1, v_2 \rangle = -2 + 1 + 1 = 0$

19.c. On note $v_3 = (a, b, c)$. D'après les hypothèses on a :

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ -a + b + c = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 1 + 1} = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ -3a = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ \sqrt{(-c)^2 + c^2} = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ \sqrt{2c^2} = \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -c \\ 2c^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow c^2 = 3$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{3} \text{ ou } c = -\sqrt{3}$$

donc $v_3 = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

19.d. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq :

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta + \sqrt{3}\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \sqrt{3}\gamma = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \quad \begin{cases} -\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow 2\beta = \alpha \\ \alpha + \beta + \sqrt{3}\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta \end{cases}$$

donc on a $2\beta = -\beta \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

donc (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de 3 éléments de $\mathbb{R}^3$ donc (v_1, v_2, v_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

19.e. $\rho(w_2) = (-1, 1, -2) = (2\alpha, \alpha, \alpha) + (0, \beta\sqrt{3}, -\beta\sqrt{3})$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = -1 \\ \alpha + \beta\sqrt{3} = 1 \\ \alpha - \beta\sqrt{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta\sqrt{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

On a bien $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = -2$

donc $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\rho(w_3) = (+\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0) = (2\gamma, \gamma, \gamma) + (0, \delta\sqrt{3}, -\delta\sqrt{3})$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\gamma = +\sqrt{3} \\ \gamma + \delta\sqrt{3} = \sqrt{3} \\ \gamma - \delta\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \delta\sqrt{3} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow \delta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On a bien $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = 0$

donc $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\delta = \frac{1}{2}$

19.f. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

19.g. On a alors $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ et $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$

$\sin(\theta) = -\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$

20.a. ~~$C + I_3 = C + CC^T = C(I_3 + C^T)$~~ $-1 \notin S(C)$

donc $\exists A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tq $(C + I_3)A = I_3 \Rightarrow C^T(C + I_3)A = I_3$

$\Rightarrow (I_3 + C^T)A = I_3$ donc $C^T + I_3$ est inversible

20.b. $(C^T + I_3)(C - I_3) = C^TC - C^T + C - I_3 = C - C^T$

20.c. On pose $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ $C^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{pmatrix}$

$C - C^T = \begin{pmatrix} 0 & x_2 - x_4 & x_3 - x_7 \\ x_4 - x_2 & 0 & x_6 - x_8 \\ x_7 - x_3 & x_8 - x_6 & 0 \end{pmatrix}$ On pose $a = x_2 - x_4$, $b = x_3 - x_7$, $c = x_6 - x_8$

20 d. Soit $X \in \cancel{M_{3,1}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tq $(C - C^T)X = 0$

$$\begin{cases} a x_2 + b x_3 = 0 \\ -a x_1 + c x_3 = 0 \\ -b x_1 - c x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{b}{a} x_3 \\ -a x_1 + c x_3 = 0 \\ -b x_1 + \frac{cb}{a} x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{c}{a} x_3$$

$$\Rightarrow -\frac{bc}{a} x_3 + \frac{cb}{a} x_3 = 0$$

donc x_3 est quelconque, ainsi $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\mathrm{Ker}(C - C^T) \neq \{0\}$

20e.

21. Si $\mathrm{Ker}(C - C^T) \neq \{0\}$ alors $\dim E_0(C - C^T) \neq 0$ donc que $C^T - C$ admet 0 comme valeur propre. Donc $C^T - C$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow$ $(C^T + I_3)(C - I_3)$ n'est pas inversible or $C^T + I_3$ est inversible donc $C - I_3$ n'est pas inversible $\Rightarrow$ $1 \in S(C)$

22. ~~Soit $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. $H_V =$~~

24. a. $\langle \varphi(x), u \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(u) \rangle$ car $u \in E_1$

$= \langle x, u \rangle = 0$.

24. b. Soit $y \in E_1^\perp$. $\exists x$ tq $y = \varphi(x)$

$\Rightarrow \varphi(y) = \varphi(\varphi(x)) \in E_1^\perp$

Donc $\varphi(E_1^\perp) \subset E_1^\perp$

24. c. $\varphi(u) = m_{11} u + m_{21} v + m_{31} w$ Or $\varphi(u) = u$

donc $m_{11} = 1$, $m_{21} = m_{31} = 0$.

De plus, E_1 est de dimension 1 donc m_{12} et m_{13} sont nécessairement égaux à 0 car ils appartiennent à son orthogonal.