Copie anonyme - n°anonymat : 431510

T3-00120 431510 maths (E)

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème A

1\. a) Le résultat peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4 ou 5 donc $R_0(\Omega) = [\![1 ; 5]\!]$.

Soit $k \in [\![1 ; 4]\!]$,

Une seule face donne k et par équiprobabilité on a donc : $\mathbb{P}(R_0 = k) = \frac{1}{6}$

Pour $R_0 = 5$,

Deux faces du dé peuvent donner 5 et par équiprobabilité on a donc : $\mathbb{P}(R_0 = 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

On a bien la loi de R_0.

1\. b) On a :

$$\mathbb{E}(R_0) = \sum_{k=1}^{4} \frac{k}{6} + 5 \times \frac{2}{6}$$

$$= \frac{10}{6} + \frac{10}{6}$$

$$= \frac{10}{3}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2. a) X prend la valeur 1 avec une probabilité $\mathbb{P}(R_0 = 5) = \frac{1}{3}$ et 0 avec une probabilité $1 - \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{3}$

Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1/3)$

2. b) On a :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{2}{3}$$
$$= \frac{1}{3}$$

Et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

(par théorème du transfert) $= 1^2 \times \frac{1}{3} + 0^2 \times \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3-1}{9}$$
$$= \frac{2}{9}$$

3. a) On peut obtenir $R_i = 5$ à n'importe lequel des lancers donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$,

si $i \neq 1$, $[Y = i]$ = " on obtient un résultat différent de 5 aux $i-1$ premiers lancers et 5 au i-ème "

~~Ainsi~~ $\cancel{[Y = i] = \left(\bigcap_{j=0}^{i-1} [R_j \neq 5]\right) \cap [R_i = 5]}$

$\cancel{= \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} [R_j \neq 0]\right) \cap}$

Ainsi, $[Y=i] = \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} [R_j \neq 5]\right) \cap [R_i = 5]$.

Or, les $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ont toutes même loi que R_0 et sont indépendantes.

On a donc $\underline{\mathbb{P}(Y=i)} = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$

$$= \underline{\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \times \left(1-\frac{2}{3}\right)}$$

si $\underline{i=1}$, $\mathbb{P}(\underline{Y=1}) = \mathbb{P}(R_1 = 5)$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \underline{\left(\frac{2}{3}\right)^{1-1} \times \left(1-\frac{2}{3}\right)}$$

Ainsi, $\underline{Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)}$

3. b) $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ donc $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\frac{1}{3}}$

i.e $\underline{\mathbb{E}(Y) = 3}$

3. c) De même, $\mathbb{V}(Y) = \frac{1-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \times 9$

i.e $\underline{\mathbb{V}(Y) = \frac{2}{3}}$

4. a) Soit $i \geqslant 1$,

$$S_i = \bigcup_{k=1}^{5} \left([R_{i-1} = k] \cap [R_i = k]\right)$$

Par incompatibilité des $\left([R_{i-1}=k] \cap [R_i=k]\right)_{k\in[\![1;5]\!]}$

et par indépendance des $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\mathbb{P}(S_i) = \sum_{k=1}^{5} \mathbb{P}(R_{i-1}=k) \times \mathbb{P}(R_i=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{4}{36}$$

$$= \frac{2}{9}$$

4. b) $\mathbb{P}(S_1 \cap S_2) = \cancel{\mathbb{P}(R_{i-1}=}$

$$= \mathbb{P}(R_0 = R_1 = R_2)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{5}\left([R_0=k]\cap[R_1=k]\cap[R_2=k]\right)\right)$$

Par incompatibilité et indépendance (cf. 4 a)) on a :

$$\mathbb{P}(S_1 \cap S_2) = \sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{2}{6}\right)^3$$

$$= \frac{4+8}{6^3}$$

$$= \frac{\cancel{3}}{3^3\times 2}$$

$$= \frac{1}{2\times 9}$$

$$\neq \frac{2}{9}\times\frac{2}{9} = \mathbb{P}(S_1)\times\mathbb{P}(S_2)$$

Ainsi, les $(S_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas indépendants.

Emplacement QR Code

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4. c) $\mathbb{P}(S_2) \neq 0$.

$$\mathbb{P}_{S_2}(R_1 = S) = \frac{\mathbb{P}(R_1 = S)\ \mathbb{P}_{[R_1 = S]}(S_2)}{\mathbb{P}(S_2)} \quad \text{(loi de Bayes)}$$

$(S_2 = [R_1 = R_2])$

$$= \frac{\mathbb{P}(R_1 = S)\ \mathbb{P}(\cancel{R_1}\ R_2 = S)}{\mathbb{P}(S_2)}$$

~~(on reprend les mêmes arguments qu'en 4.a) pour calculer~~ $\cancel{\mathbb{P}(R_1 = R_1 = S)}$~~)~~

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} \quad \text{(calculs des questions 4 a) et 4. b))}$$

$$= \frac{1}{2}$$

5. a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$,

si $i \neq 1$, $[Z = i] = \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{S_j}\right) \cap S_i$

si $i = 1$, $[Z = 1] = S_1$.

En effet, pour que i soit le minimum de $\{i \geq 1 : R_i = R_{i-1}\}$ il faut que les $(S_j)_{j \in [\![1 ; i-1]\!]}$ ne se réalisent pas puis que S_i

se réalise.

5. b) Les $(S_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ n'étant pas indépendants,

On a : si $i \neq 1$, $\mathbb{P}(Z=i) \neq \left(\prod_{j=1}^{i-1} \mathbb{P}(\overline{S_j})\right) \times \mathbb{P}(S_i)$

i.e $\mathbb{P}(Z=i) \neq \left(1-\frac{2}{9}\right)^{i-1} \times \frac{2}{9}$

donc Z ne suit pas une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{9}$.

Or, si Z suit une loi géométrique de paramètre p, alors on a :

$$\mathbb{P}(Z=1) = p\,(1-p)^0 = p$$

Or $\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(S_1) = \frac{2}{9}$.

Donc Z ne suit pas une loi géométrique

6. $[B = R_0] = \bigcup_{k=1}^{5} \left([B=k] \cap [R_0 = k]\right)$

En effet, si B peut prendre la valeur 6, R_0 ne le peut pas.

Par incompatibilité des $\left([B=k] \cap [R_0=k]\right)_{k \in [\![1;5]\!]}$ et par indépendance de B et R_0, on a :

$$\mathbb{P}(B=R_0) = \sum_{k=1}^{5} \mathbb{P}(B=k) \times \mathbb{P}(R_0=k)$$

Or, $\forall k \in [\![1;6]\!]$, comme le dé blanc est classique, on a :

$$\mathbb{P}(B=k) = \frac{1}{6}$$ (par équiprobabilité).

Ainsi, on a donc :

$$\mathbb{P}(B=R_0) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6}$$

(on reprend les valeurs trouvées en 1.)

Ainsi, $$\underline{\mathbb{P}(B=R_0)} = \frac{4+2}{36} = \underline{\frac{1}{6}}$$

7. On raisonne de même qu'en 6.

On a donc : $$\mathbb{P}(V=R_0) = \mathbb{P}(V=1)\mathbb{P}(R_0=1) + \mathbb{P}(V=3)\mathbb{P}(R_0=3) + \mathbb{P}(V=5)\mathbb{P}(R_0=5)$$

(V ne peut prendre que les valeurs 1, 3 et 5).
et V et R_0 sont indépendants

Or, par équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}(V=1) = \frac{2}{6}$$

$$\mathbb{P}(V=3) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(V=5) = \frac{3}{6}$$

Ainsi, on a :

$$\mathbb{P}(V=R_0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{6}$$

$$= \frac{2+1+6}{36}$$

Donc $\mathbb{P}(V = R_0) = \frac{1}{4}$

8. a) • $f(1) = \min\left(\frac{1}{2}, e\right)$

Or $e > \cancel{0} \; 1 > \frac{1}{2}$

Donc $f(1) = \cancel{2} = \frac{1}{2}$

• $f(2) = \min(1, 1)$

$= 1$

• $f(2 + \ln(2)) = \min\left(1 + \ln(\sqrt{2}), \frac{1}{2}\right)$

Or, $\sqrt{2} > 1$ donc $\ln(\sqrt{2}) > 0$

donc $1 + \ln(\sqrt{2}) > 1 > \frac{1}{2}$

Donc $f(2 + \ln(2)) = \frac{1}{2}$

8. b) On pose $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{x}{2} - e^{2-x}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = \frac{1}{2} + e^{2-x} > 0$

Ainsi, on a :

i) g continue car dérivable sur $\mathbb{R}_+$

ii) g strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

~~iii)~~ $\cancel{g(0) = -e^2 < 0}$

$\cancel{g(\underbrace{2 + \ln(2)}_{>0}) = 1 + \ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{2} > 0 \quad (\text{cf. } 8.\text{ a})}$

Copie anonyme - n°anonymat : 431510

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~Aussi~~ /,

iii) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (par somme)

$\cancel{\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty}$ ~~(par somme)~~ et $g(0) = -e^2 < 0$

Ainsi, g est une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $[-e^2, +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, on a :

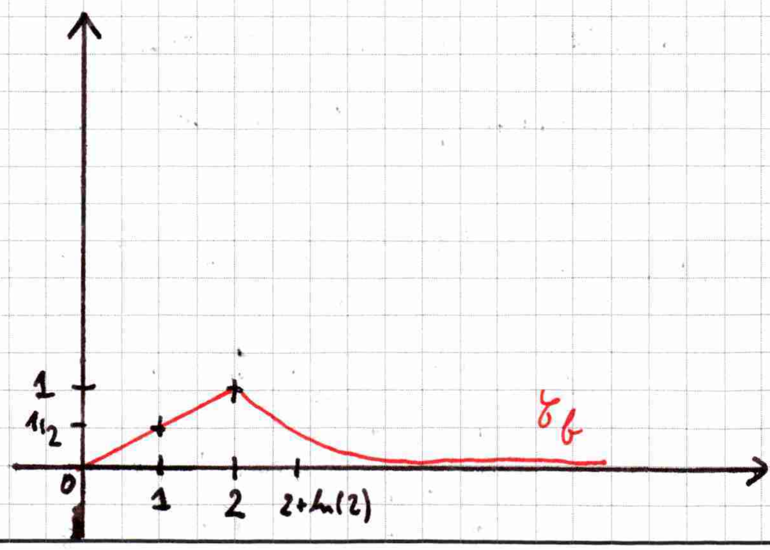
$\exists !\, x \in \mathbb{R}_+$ tq $g(x) = 0$

i.e $\frac{x}{2} = e^{2-x}$

Or, $\frac{2}{2} = 1 = e^0 = e^{2-2}$

Donc cet x vaut 2.

8. c)



NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

En effet, par croissance de g,

$\forall x \geq 2$, $\frac{x}{2} \geq e^{2-x}$ donc $f(x) = e^{2-x}$

et $\forall x \leq 2$, $\frac{x}{2} \leq e^{2-x}$ donc $f(x) = \frac{x}{2}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2-x} = 0$

9. a) λf est une densité de probabilité

donc $\int_0^{+\infty} \lambda f(t)\, dt = 1$

donc $\int_0^2 \lambda \frac{t}{2}\, dt + \int_2^{+\infty} \lambda e^{2-t}\, dt = 1$

ie $\left[\lambda \frac{t^2}{4} \right]_0^2 + \left[-\lambda e^{2-t} \right]_2^{+\infty} = 1$

ie $\lambda + \lambda = 1$

ie $\lambda = \frac{1}{2}$

On a bien λf continue sur $\mathbb{R}_+$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\lambda f(x) \geq 0$.

9. b) $\mathbb{P}(N > 2) = \int_2^{+\infty} 1/2\, f(t)\, dt$

$= \int_2^{+\infty} \frac{1}{2} e^{2-t}\, dt$

$= \left[-\frac{1}{2} e^{2-x} \right]_2^{+\infty}$

i.e. $\mathbb{P}(N>2) = \frac{1}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$,

9. c) $\mathbb{P}(N > x+2 \mid N>2) = \dfrac{\mathbb{P}([N>x+2] \cap [N>2])}{\mathbb{P}(N>2)}$

$$= \frac{\mathbb{P}(N>x+2)}{\mathbb{P}(N>2)} \quad (\text{car } x+2 \geqslant 2)$$

Or, $\mathbb{P}(N>x+2) = \displaystyle\int_{x+2}^{+\infty} \frac{1}{2} f(t)\, dt$

$$= \int_{x+2}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{2-t}\, dt \quad (\text{car } x+2 \geqslant 2)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2-x-2}$$

$$= \frac{1}{2e^x}$$

Donc $\mathbb{P}(N> x+2 \mid N>2) = \dfrac{\frac{1}{2e^x}}{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{e^x}$$

9. d) Soit $A > 2$,

$$\int_0^A t \frac{1}{2} f(t)\, dt = \int_0^2 \frac{t^2}{4}\, dt + \int_2^A \frac{t e^{2-t}}{2}\, dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{12}\right]_0^2 + \left[\frac{-t e^{2-t}}{2}\right]_2^A - \int_2^A -\frac{e^{2-t}}{2}\, dt$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{2} - \frac{A e^{2-A}}{2} + \left[-\frac{e^{2-t}}{2}\right]_2^A$$

$$= \frac{4}{3} + 1 - \frac{A e^{2 \cdot A}}{2} - \frac{e^{2 \cdot A}}{2} + \frac{1}{2}$$

Ceci converge quand $A \to +\infty$ vers $\frac{4}{3} + 1 + \frac{1}{2}$

par croissances comparées.

Ainsi, N admet une espérance et $\mathbb{E}(N) = \frac{6+8+3}{6}$

i.e. $\mathbb{E}(N) = \frac{17}{6}$

Problème B :

12. a) ~~Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,~~

$$\cancel{g(x) = x\left(1 + 2\left(-\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

Par composition ~~($x \mapsto e^x$ est continue en 0)~~,

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

Par produit et par somme, on a alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - 2e^{-\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

i.e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

12. b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g(x) = x\left(1 + 2\left(-\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

Or, $\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$

Par croissances comparées, on a donc :

$$\lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

Par somme et produit, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + 2\left(-\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}\right) = 1$$

Par produit, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0.$$

La limite à droite en 0 de g est donc 0.

12. c) On s'intéresse à l'équation :

$$x - 2e^{-\frac{1}{x}} = x$$

$$\iff -2e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\iff e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

Or, $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^{u} > 0$

donc $e^{-1/x} > 0$

L'équation n'a donc pas de solution.
Ainsi, le graphe de g n'intersecte pas la droite d'équation $y = x$.

13. a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{t \to 0^+} \ln(t) = -\infty$$

et $\lim_{t \to 0^+} -t = 0$

Par somme, on a donc : $\underline{\lim_{t \to 0^+} h(t) = -\infty}$

. $h(t) = t\left(\dfrac{\ln(t)}{t} - 1\right)$

Or, par croissances comparées, $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$

Par somme et produit on a donc : $\underline{\lim_{t \to +\infty} h(t) = -\infty}$

13. b) $t \mapsto \ln(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, tout comme $t \mapsto -t$.

Par somme, $\underline{h(t) \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\underline{h'(t) = \dfrac{1}{t} - 1}$

13. c) À partir de la formule de $h'(t)$ de t, on obtient que h est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$. $h(1) = -1$

En ajoutant les limites établies en 13. a), on a le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$			0		
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

13. d) On pose $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \ln(2t) - t$

f est dérivable par somme sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{2}{2t} - 1 = \dfrac{1}{t} - 1$

De même que pour h, on a les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

et f est croissante sur ~~]0; 1[~~ $]0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

Or, $f(1) = \ln(2) - 1$

Comme $\ln(2) < \ln(e) = 1$, $f(1) < 0$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leqslant f(1)$ (car ~~f est~~ f atteint son maximum en 1),

On a : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $\ln(2t) - t < 0$

ie $\ln(2t) < t$

13. e)

Copie anonyme - n°anonymat : 431510

Emplacement QR Code

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

14. a) ~~Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$~~

Raisonnons par récurrence :

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : " $u_n > 0$ ".

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Initialisation : $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On suppose P_n vraie.

Montrons P_{n+1}.

Par hypothèse, $u_n > 0$

On peut donc appliquer g à u_n :

$$g(u_n) = u_n - 2e^{-\frac{1}{u_n}} = u_{n+1}$$

Or, d'après 13. a), comme $u_n > 0$, $g(u_n) > 0$.

Donc $u_{n+1} > 0$. P_{n+1} est vérifiée.

Conclusion : On a bien :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

Or, comme $u_{n+1} = g(u_n)$, cela suffit à ce

(u_n) soit définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. (u_0 étant défini dans l'énoncé).

14. b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -2e^{-\frac{1}{u_n}} < 0$$

Ainsi, on a :

i) (u_n) est décroissante

ii) (u_n) est minorée par 0 (d'après 14. a))

D'après le théorème de ~~la~~ limite monotone, on a donc bien : (u_n) admet une limite.

14. c) Raisonnons par l'absurde et supposons que cette limite (notée l) est différente de 0.

Par passage à la limite de l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n, on a :

$$l = l - 2e^{-\frac{1}{l}} \quad \text{(on peut l'écrire car } l \neq 0)$$

ie $\exp\left(-\frac{1}{l}\right) = 0$

Ce qui est absurde car $\forall u \in \mathbb{R}$, $\exp(u) > 0$.

Donc ~~on~~ a bien $l = 0$.

15. a) En $s = 0$, on a :

$$(1-s)^{-\alpha} = 1 + \alpha s + o(s)$$

15. b) Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$2 u_k^{-1} e^{-\frac{1}{u_k}} = -2\left(-\frac{1}{u_k}\right) e^{-\frac{1}{u_k}}.$$

Or, $\lim\limits_{k \to +\infty} u_k = 0^+$ (d'après 14. c))

Donc $\lim\limits_{k \to +\infty} -\frac{1}{u_k} = -\infty$

Par croissances comparées, on a alors :

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\left(-\frac{1}{u_k}\right) e^{-\frac{1}{u_k}}\right) = 0$$

Par produit, il vient : $\lim\limits_{k \to +\infty} 2 u_k^{-1} e^{-\frac{1}{u_k}} = 0$

15. c) Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha} =$$

15. d)

Pour tout $\varepsilon > 0$,

15. e) $\exists\, q \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq q \quad |u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \leq 2\varepsilon n$

~~En~~

Soit $n \neq 0$, on a alors $\left| \dfrac{u_n^{-\alpha}}{n} - \dfrac{u_0^{-\alpha}}{n} \right| \leq 2\varepsilon$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ ~~et donc~~ ~~lim~~ et qu'une valeur absolue est positive, par théorème d'encadrement (en faisant tendre ε vers 0), on a :

$$\frac{u_n^{-\alpha}}{n} = \frac{u_0^{-\alpha}}{n}$$

Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et α ne dépend pas de n, par passage à la limite sur n, on a :

$$\frac{u_n^{-\alpha}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

15. f)

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

16. a) $\partial_1 F(x,y) = 1 - \frac{y}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

(par dérivées usuelles).

$\partial_2 F(x,y) = \cancel{1} - e^{-\frac{1}{x}}$ (par dérivées usuelles)

16. b) $\cancel{\forall}$ (x,y) point critique de F

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{y}{x^2} e^{-1/x} = 0 \\ \cancel{y} - e^{-1/x} = 0 \end{cases}$

$\cancel{\Leftrightarrow}$ F n'admet pas de point critique

car $\forall x \in \mathbb{R}, -e^{-1/x} > 0$

donc F n'admet pas d'extremum local

17. a) $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(\frac{1}{t}, y) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{t} - y e^{-t} = 0$

$\Leftrightarrow$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 019 711

Emplacement QR Code

Filière : BIL

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème C :

18. a) Soit (x,y,z) et $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\varphi\big(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')\big)$$
$$= \varphi(\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z')$$
$$= (-\lambda y-y', \lambda z+z', -\lambda x-x')$$
$$= \lambda(-y,z,-x)+(-y',z',-x')$$
$$= \lambda\,\varphi(x,y,z)+\varphi(x',y',z')$$

φ est donc bien une application linéaire.

$$\varphi((1,0,0)) = (0,0,-1)$$
$$\varphi((0,0,1)) = (0,1,0)$$
$$\varphi((0,1,0)) = (-1,0,0)$$

Ainsi, la matrice A de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18. b) $$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+1 & 1+0+0 & \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+1+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= I_3$$

Ainsi, A est inversible et $A^T = A^{-1}$

19. a) ~~Soit X~~ Soit $X \in \operatorname{Ker}(A - I_3)$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ie $\begin{cases} -x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = z \\ x = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = z \end{cases}$

Ainsi, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à 1 de ρ et 1 est valeur propre de ρ

19. b) $\langle v_1, v_2 \rangle = 2 - 1 - 1 = 0$

19. c) Soit $v_3 = (a, b, c)$,
Avec les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a - b - c = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \\ 2c^2 = 6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = \sqrt{3} \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 0 \\ c = -\sqrt{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 019 711

Copie anonyme - n°anonymat : 431510

Filière : BCL

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi, $v_3 = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ convient.

19. d) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \sqrt{3}\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{3}\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ 3\lambda_2 + \sqrt{3}\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - \sqrt{3}\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 = \sqrt{3}\lambda_3 \\ \lambda_1 = -2\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Donc (v_1, v_2, v_3) a 3 éléments et est libre, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~19.e)~~ $\rho(v_2) = \alpha v_2 + \beta v_3$

19.e)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2\alpha + 0 \\ 1 = \alpha + \sqrt{3}\beta \\ -2 = \alpha - \sqrt{3}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} = \sqrt{3}\beta \\ -\frac{3}{2} = -\sqrt{3}\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\rho(v_3) = \gamma v_2 + \delta v_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} = 2\gamma + 0 \\ -\sqrt{3} = \gamma + \sqrt{3}\delta \\ 0 = \gamma - \sqrt{3}\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\delta \\ +\frac{\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}\delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \delta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

19. f)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

19. g)

20. a) $\cancel{(C^T + I_3)(-C) =}$

Si $-1 \notin S(C)$,

alors $C + I_3 \in Gl_3(\mathbb{R})$

si $A \in Gl_3(\mathbb{R})$, alors $A^T \in Gl_3(\mathbb{R})$

donc $(C + I_3)^T \in Gl_3(\mathbb{R})$

donc $C^T + I_3 \in Gl_3(\mathbb{R})$

20. b) $(C^T + I_3)(C - I_3)$

$= C^T C + C - C^T - I_3$

$= C - C^T$

20. c)

20. d)

22. a) $(H_V)^T = \left(2\frac{VV^T}{\|V\|^2} - I_3\right)^T$

$$= \frac{2(V^T)^T(V^T)}{\|V\|^2} - I_3$$

$$= \frac{2VV^T}{\|V\|^2} - I_3$$

$$= H_V$$

$H_V V = 2\frac{\cancel{VV}^T V}{\|V\|^2} - V$

$$= \cancel{V}\left(\frac{2}{\|V\|}I_3 - \cancel{I_3}\right)$$

$(H_V)^T H_V = H_V H_V$

$$= \frac{4\cancel{VV^TVV^T}}{\|\cancel{V}\|^4} - 4\frac{\cancel{V}V^T}{\|V\|^2} + I_3$$

$$= 4\frac{VV^T}{\|V\|^3} - 4\frac{VV^T}{\|V\|^2} + I_3$$

$$= \frac{4VV^T}{\|V\|^2}\left(\frac{1}{\|V\|} - 1\right) + I_3$$

22. b) ~~H~~ $H_V X = Y \iff 2\frac{VV^T}{\|V\|^2}X - X = Y$

$$\iff 2\frac{VV^T}{\|V\|^2}(X - Y) - X = -\left(2\frac{VV^T}{\|V\|^2}\cancel{X} - Y\right)$$