Copie anonyme - n°anonymat : 468853

D7-00064
468853
maths (E)

Filière : B/L	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème A

DÉ ROUGE

1. 1.a.

$$\boxed{\begin{array}{l} R_0(\Omega) = [\![1,5]\!] \\ \forall k \in [\![1,4]\!],\ P([R_0=k]) = \frac{1}{6} \\ P([R_0=5]) = \frac{1}{3} \end{array}}$$

1.b. $E(R_0) = \sum_{k \in R_0(\Omega)} k\, P([R_0=k])$

$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{3}$

$= \frac{1+2+3+4+10}{6}$

$= \frac{20}{6}$

$= \frac{10}{3}$

$\underline{E(R_0) = 10/3}$

2. 2.a. $\underline{X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, \frac{1}{3})}$

2.b. $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\, P([X=k])$

$= 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}$

$V(X) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$

D'où $\boxed{\begin{array}{l} E(X) = \frac{1}{3} \\ V(X) = \frac{2}{9} \end{array}}$

Pour calculer la variance on procède ainsi :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \quad \text{(Koenig-Huygens)} \\ &= E(X) - E(X)^2 \quad \text{(car X suit la même loi que } X^2\text{, les elements du supports étant 0 \& 1)} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

3. 3.a. Y donne le premier lancer où l'on obtient un 5.

Om reconnaît un schéma de Bernoulli puisque les lancers sont independants et la probabilité d'apparition d'un 5 est toujours la même.

Donc $\underline{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{3})}$

(loi geométrique de paramètre $\frac{1}{3}$)

3.b. $E(Y) = \frac{1}{\frac{1}{3}}$

$= 3$

3.c. $V(Y) = \dfrac{1-\frac{1}{3}}{(\frac{1}{3})^2}$

$= \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}}$

$= \dfrac{2 \times 9}{3}$

$= 6$

<u>D'où $E(Y) = 3$ & $V(Y) = 6$</u>

4. 4.a. Soit $i \geq 1$ fixé

~~Pour $i = 1$ $P(S_1) = 0$~~

$$P([S_i]) = P([R_{i-1} = R_i])$$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{5} [(R_{i-1}) = k] \cap [(R_i = k)]\right)$$ événements deux à deux incompatibles

$$= \sum_{k=1}^{5} P([R_{i-1}) = k] \cap [R_i = k])$$ dé équilibré donc lancers indépendants

$$= \sum_{k=1}^{5} P(R_{i-1} = k) P(R_i = k)$$ les $(R_i)_{i \in [1,5]}$ suivent la même loi que R_0

$$= \sum_{k=1}^{5} P(R_0 = k) P(R_0 = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{5} P(R_0 = k)^2$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{4+4}{36}$$

$$= \frac{8}{36}$$

$$= \frac{2}{9}$$

D'où $P(S_i) = \frac{2}{9}$ pour $i \geq 1$

4.b. $P([S_1]) P([S_2]) = \frac{4}{81}$ (en faisant $P([S_i])^2$)

$$P([S_1 \cap S_2]) = P([R_0 = R_1 = R_2])$$ par le même raisonnement de la question 4a mutatis mutandis

$$= \sum_{k=1}^{5} P([R_0 = k])^3$$

$$= \frac{1}{216} + \frac{1}{216} + \frac{1}{216} + \frac{1}{216} + \frac{1}{27}$$

$$= \frac{3}{54}$$

$P(S_1)P(S_2) \neq P(S_1 \cap S_2)$ donc les événements $S_1, S_2, S_3, \ldots$ ne sont pas indépendants

4. c $$P([R_1=5] \mid [R_1=R_2]) = \frac{P(R_1=5 \cap R_1=R_2)}{P(S_2)}$$

$$= \frac{P(R_1=5 \cap R_2=5)}{\frac{2}{9}}$$

$$= \frac{P(R_1=5)P(R_2=5)}{\frac{2}{9}}$$ indépendance des lancers

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}}$$

$$= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\boxed{P([R_1=5] \mid [R_1=R_2]) = \frac{1}{2}}$$

5. 5.a. $Z = \min\{i \geq 1 : R_i = R_{i-1}\}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\begin{aligned}[Z=k] &= [\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k] \\ &= [(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{S_i}) \cap S_k]\end{aligned}}$$

Z donne le premier lancer où ~~deux~~ le même numéro apparaît deux fois consécutives ; tout les lancers précédents doivent ainsi, à la suite, donner des résultats deux à deux différents.

D'où $\underline{[Z=k] = [(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{S_i}) \cap S_k]}$

5.b. $P([Z=1]) = P(S_1) = \frac{2}{9}$

À supposer que Z suit effectivement une loi géométrique, son paramètre est donc $\frac{2}{9}$ et par conséquent :

Copie anonyme - n°anonymat : 468853

Filière : B/L	Session : 2024
Épreuve de : Mathématiques	

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$P([Z=2]) = \frac{2}{9}\left(1-\frac{2}{9}\right) = \frac{14}{81}$$

Ainsi si $P([Z=2]) \neq \frac{14}{81}$, Z ne suit pas une loi géométrique.

Si $P([Z=2]) = \frac{14}{81}$, on ne peut rien conclure.

DÉ BLANC

6. $B(\Omega) = [\![1,6]\!]$

$R_0(\Omega) = [\![1,5]\!]$

Soit $k \in B(\Omega) \cap R_0(\Omega)$ i.e soit $k \in [\![1,5]\!]$,

$$P([B=R_0]) = \underbrace{\sum_{k=1}^{5} P(B=k \cap R_0=k)}_{\text{les événements sont deux à deux incompatibles}}$$

$$= \sum_{k=1}^{5} P(B=k)\,P(R_0=k)$$ ✓ indépendance des deux dés

$$= \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{6} P(R_0=k)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{5} P(R_0=k)\right)$$

$$= \frac{1}{6}$$

Donc $P([B=R_0]) = \frac{1}{6}$

DÉ VERT

7. $P(V = R_0) = \underbrace{P((V=R_0=1) \cup (V=R_0=3) \cup (V=R_0=5))}$

car $V(\Omega) \cap R_0(\Omega) = \{1; 3; 5\}$

$= \underbrace{P(V=R_0=1) + P(V=R_0=3) + P(V=R_0=5)}_{\text{incompatibilité des évènements}}$

$= \underbrace{P(V=1)P(R_0=1) + P(V=3)P(R_0=3) + P(V=5)P(R_0=5)}_{\text{indépendance entre } V \text{ \& } R_0}$

$= \frac{1}{3}\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{6}$

$= \frac{2+1+6}{36} = \frac{9}{36}$

$= \frac{1}{9}$

D'où $\boxed{P([V = R_0]) = \frac{1}{9}}$

8. 8.a. $f(1) = \min\left(\frac{1}{2}, e^1\right)$

$= \frac{1}{2}$ car $e \simeq 2,7$

$f(2) = \min(1, e^0)$

$= 1$

$f(2+\ln(2)) = \min\left(1 + \frac{\ln(2)}{2}, e^{2-2-\ln(2)}\right)$

$= \min\left(1 + \frac{\ln(2)}{2}, e^{-\ln(2)}\right)$

$= \min\left(1 + \frac{\ln(2)}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{D'où } & f(1) = \frac{1}{2} \\ & f(2) = 1 \\ & f(2+\ln(2)) = \frac{1}{2} \end{aligned}}$$

8.b. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x}{2} - e^{2-x}$$

g dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de telles fonctions et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \underbrace{\frac{1}{2} + e^{2-x}}_{\text{strictement positif sur } \mathbb{R}}$$

<u>donc g strictement croissante</u>

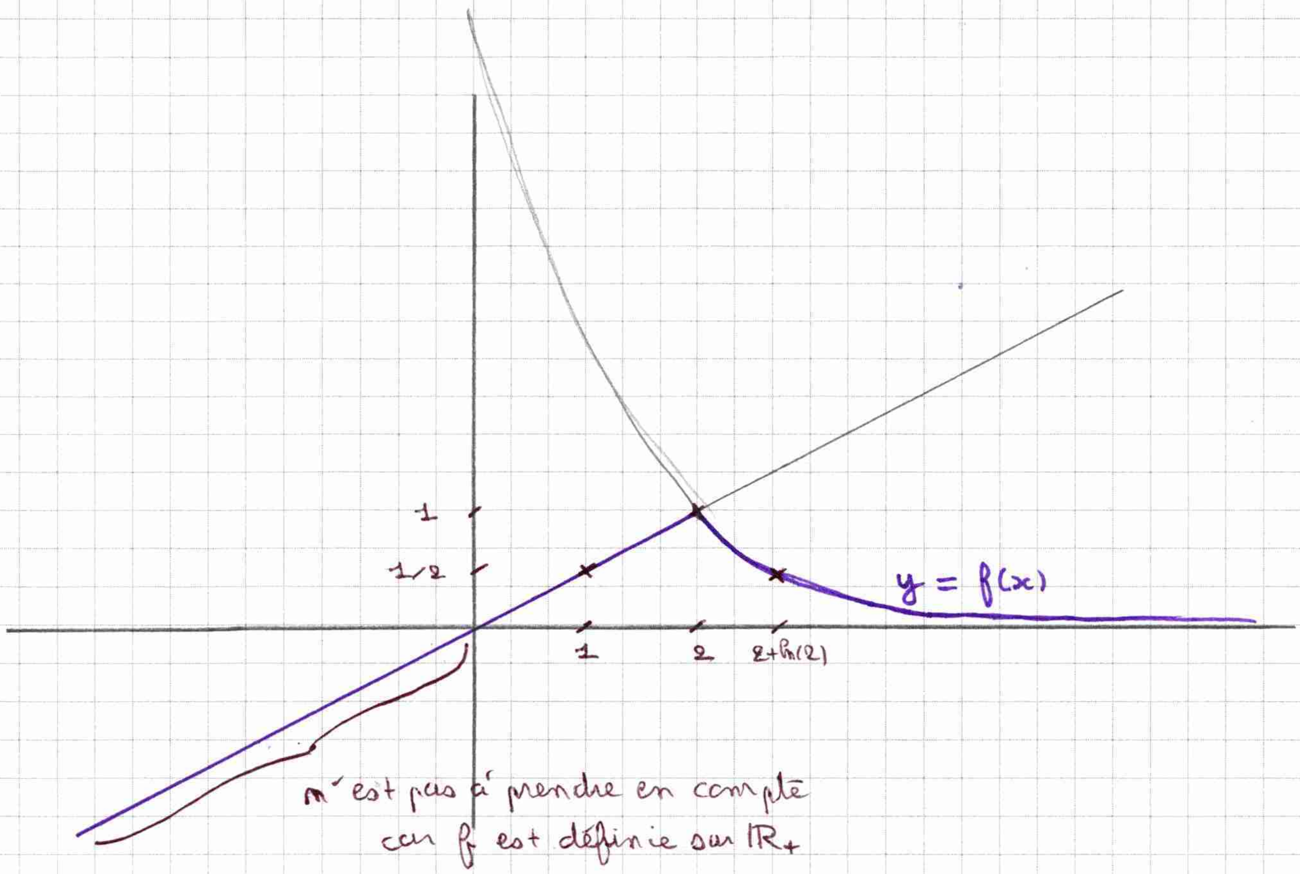
Alors, si g s'annule, elle s'annule en un unique point ; or $g(2) = 1 - 1 = 0$

<u>Donc il existe un unique réel tel que $\frac{x}{2} = e^{2-x}$, et ce réel est 2.</u>

8.c. D'après 8.b, ~~avant 2~~ $\forall x \leq 2$, $f(x) = \frac{x}{2}$

$\forall x \geq 2$, $f(x) = e^{2-x}$

D'où le graphe suivant (page d'après) :



9. 9. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}^+$, $M > 2$

$\int_0^M \lambda f(x)\,dx$ existe car f continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\int_0^M \lambda f(x)\,dx = \int_0^2 \lambda \frac{x}{2}\,dx + \int_2^M \lambda e^{2-x}\,dx$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \lambda\left[-e^{2-x}\right]_2^M$$

$$= \frac{\lambda}{2}\,\frac{4}{2} + \lambda\left(e^{2-2} - e^{2-M}\right)$$

$$= \lambda + \lambda - \lambda e^{2-M}$$

$$= 2\lambda - \lambda e^{2-M} \xrightarrow[M \to +\infty]{} 2\lambda$$

Or si N a pour densité λf, la valeur de cette intégrale doit être 1 ; d'où $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$

9.b

$$\begin{aligned} P(N>2) &= 1 - P(N \leq 2) \\ &= 1 - \int_0^2 \frac{1}{2}\frac{x}{2}\,dx \\ &= 1 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \\ &= 1 - \frac{4/2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où $P(N>2) = \frac{1}{2}$

9.c Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$P(N > x+2 \mid N>2) = \frac{P([N> x+2] \cap [N>2])}{P([N>2])}$$

$$= \frac{P([N>x+2])}{1/2}$$

On $P([N>x+2]) = 1 - P([N<x+2])$

$$\begin{aligned} &= 1 - \int_0^{x+2} \frac{1}{2} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2} - \int_2^{x+2} \frac{e^{2-t}}{2}\,dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[-e^{2-t}\right]_2^{x+2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{2-2} - e^{2-x-2}\right) \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - e^{-x})$$

$$= \frac{1}{2}(\cancel{1} - \cancel{1} + e^{-x})$$

$$= \frac{e^{-x}}{2}$$

$$\boxed{\text{D'où} \quad P(N > x+2 \mid N > 2) = \frac{\frac{e^{-x}}{2}}{\frac{1}{2}} = e^{-x}}$$

10. 10.a. si $0 \leq N < a$ alors $D = 1$

donc on doit avoir $\int_0^a \lambda f(t)\,dt = \frac{1}{3}$

si $b \leq N$ alors $D = 5$

donc on doit avoir $\int_b^{+\infty} \lambda f(t)\,dt = \frac{1}{2}$

i.e $P(N \geq b) = \frac{1}{2}$

D'après 9.b, b = 2 convient

10.b. Soit $a < b$, tel que $a \in \mathbb{R}^+$

$$\int_0^a \lambda f(t)\,dt = \int_0^a \frac{1}{4} t \,dt \quad \text{car } \lambda = 1/2 \text{ et } f(x) = x/2 \text{ sur } [0, 2]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^a dt$$

$$= \frac{a^2}{8}$$

Il faut alors résoudre $\frac{a^2}{8} = \frac{1}{3}$ (*)

$(*)$ $\frac{a^2}{8} = \frac{1}{3} \iff a^2 = \frac{8}{3}$

$\iff a = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$

$\iff a = \sqrt{\frac{8}{3}}$ car $a \in \mathbb{R}^+$

$$\boxed{\text{D'où } a = \sqrt{\frac{8}{3}}}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 019 711

Copie anonyme - n°anonymat : 468853

Emplacement QR Code	Filière : B/L	Session : 2024
	Épreuve de : Mathématiques	

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème B

$$g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x - 2e^{-\frac{1}{x}}$$

12. 12.a $g(x) = \underbrace{x}_{\substack{\downarrow x \to +\infty \\ +\infty}} - 2\underbrace{e^{-\overset{\substack{0 \\ \uparrow x\to+\infty}}{\frac{1}{x}}}}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ 1}}$ par composé de limites

D'où $\boxed{\lim_{+\infty} g = +\infty}$

12.b $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ donc $-\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$

Par composition de limite on trouve $e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

Donc $g(x) = \underbrace{x}_{\substack{\downarrow x\to 0^+ \\ 0}} - \underbrace{2e^{-\frac{1}{x}}}_{\substack{\downarrow x\to 0^+ \\ 0}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

$\boxed{\text{D'où } \lim_{0^+} g = 0}$

12.c Il s'agit de résoudre $g(x) - x = 0$

$g(x) - x = 0 \iff -2e^{-\frac{1}{x}} = 0$

$\iff e^{-\frac{1}{x}} = 0$ ce qui est absurde car pour tout réel la fonction exponentielle est strictement positive.

$\boxed{\text{Donc le graphe de } g \text{ n'intersecte pas la droite d'équation } y = x \text{ (il reste toujours au dessous, en fait)}}$

13. 13.a. $\ln(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} -\infty$

$t \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$

D'où par addition, $\underline{\lim_{0^+} R = -\infty}$

$$R(t) = \ln(t) - t$$
$$= \underbrace{t \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty}_{} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\ln(t)}{t}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ par croissance comparée}} - 1 \right)}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} -1}$$
$$\xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$$

D'où $\underline{\lim_{+\infty} R = -\infty}$

13.b $\ln : t \longmapsto \ln(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$id : t \longmapsto \ln(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc h dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que que combinaison linéaire de telles fonctions

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(t) = \frac{1}{t} - 1$$

13.c. $h'(t) > 0 \iff \frac{1}{t} > 1$

$\iff t < 1$

On en déduit le tableau suivant

t	0		1		$+\infty$
$h'(t)$	||	$+$	0	$-$	
$h(t)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

car $h(1) = -1$

13.d. Montrons que $\underbrace{t - \ln(2t)}_{f(t)} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

f dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) = 1 - \frac{2}{2t}$

$= 1 - \frac{1}{t}$

$= -h'(t)$

Donc f décroissante sur $]0,1]$ puis croissante sur $[1,+\infty[$.

Or $f(1) = 1 - \ln(2) > 0$ car $\ln(2) \simeq 0{,}7$

De plus f continue donc $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $f(t) > 0$

i.e. $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $\ln(2t) < t$

15. 15.a. D'après 13.e (résultat admis) :

$$\mathrm{Im}(g) \subset \mathbb{R}_*^+$$

or $\mathbb{R}_*^+$ est le domaine de définition de g

Donc on peut procéder par récurrence initialisée facilement et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien définie, car l'image de g appartient à son domaine de définition

15.b. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \cancel{u_n} - 2e^{-\frac{1}{u_n}} - \cancel{u_n}$$

$$= \underbrace{-2\underbrace{e^{-\frac{1}{u_n}}}_{\text{strictement supérieur à zéro}}}_{\text{strictement inférieur à zéro}}$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement monotone (décroissante)

Cela suffit à montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

15.c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie à partir de g, est positive donc convergente vers un réel $\ell \geq 0$.

Par passage à la limite sur $u_{n+1} = u_n - 2e^{-\frac{1}{u_n}}$ on a, en $+\infty$:

$$\ell = \ell - 2e^{-\frac{1}{\ell}} \quad \text{i.e} \quad 0 = e^{-\frac{1}{\ell}}$$

or pour que $e^{-\frac{1}{u_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

il faut que $-\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

et donc que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 468853

Emplacement QR Code

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

15. 15.a. $\boxed{(1-s)^{-\alpha} \underset{0}{=} 1 - \alpha s + \underset{s \to 0}{o}(s)}$

15.b. $2 \mu_\ell^{-1} e^{-\mu_\ell^{-1}} = 2 \frac{1}{\mu_\ell} e^{-\frac{1}{\mu_\ell}}$

$\ell \longrightarrow +\infty \Rightarrow \mu_\ell \longrightarrow 0^+$

$\Rightarrow \frac{1}{\mu_\ell} \longrightarrow +\infty$

$2 \frac{1}{\mu_\ell} e^{-\frac{1}{\mu_\ell}} = 2 K e^{-K} \underset{\substack{\ell \to +\infty \\ K \to +\infty}}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées en posant $K = \frac{1}{\mu_\ell}$

$\underline{\text{D'où } \lim_{+\infty} 2 \mu_\ell^{-1} e^{-\frac{1}{\mu_\ell}} = 0}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

16. $F(x,y) = x - y e^{-\frac{1}{x}}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

16.a. $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 1 - \dfrac{y e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$

$\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = - e^{-\frac{1}{x}}$

17. 17.a. On pose $t = \frac{1}{x}$

$F(x,y) = 0 \iff x - y e^{-t} = 0$

$\iff x = y e^{-t}$

$\iff \ln(x) = \ln(y e^{-t})$ licite car éléments strictements positifs

$\iff \ln(x) = \ln(y) + \ln(e^{-t})$

$\iff \ln(\frac{1}{t}) = \ln(y) - t$

$\iff -\ln(t) = \ln(y) - t$

$\iff R(t) = -\ln(y)$

On retrouve ainsi une équation $R(t) = r$ avec $r = -\ln(y)$ ← il s'agit de ratures, je voulais à chaque fois écrire $-\ln(y)$

17.b. D'après la question 13.c, l'équation a une unique solution si $r = -1$, aucune si $r > -1$ et deux si $r < 1$

En effet, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists!\ t \in]0;1[$, $f_n(t) = n$ si $n<-1$ car R continue sur $]0;1[$ et à la fois inférieure et supérieure à n sur cet ensemble (l'unicité provient de la stricte croissance).

On raisonne mutatis mutandis pour trouver une seconde solution sur $]1;+\infty[$

Copie anonyme - n°anonymat : 468853

Emplacement QR Code

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème C

CAS PARTICULIER $\quad \rho : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \longmapsto (-y, z, -x)$

18. 18.a Soient $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ & $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda \rho((x,y,z)) + \mu \rho((x',y',z')) = (-\lambda y - \mu y', \lambda z + \mu z, -\lambda x - \mu x')$$
$$= \rho(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z'))$$

d'où la linéarité de ρ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18.b $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^T A = I_3$ donc A inversible d'inverse A^T

19. 19a. Une valeur propre de ρ est une valeur propre de A.

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On remarque que $A - I_3$ n'est pas inversible car on peut exprimer l'une de ses lignes comme une combinaison linéaire des autres $(L_3 = L_1 - L_2)$

Donc A & P admettent 1 comme valeur propre

Un vecteur propre associé est par exemple $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(Av_1 = v_1)$

19.b. $v_2 = (2, 1, 1)$

$\langle v_1, v_2 \rangle = 2 - 1 - 1 = 0$

$(v_1 \perp v_2)$

19.c. Soit $v_3 = (a, b, c)$

$\langle v_3, v_2 \rangle = 0 \iff 2a + b + c = 0$ ①

$\langle v_3, v_1 \rangle = 0 \iff a - b - c = 0$ ②

$\|v_3\| = \|v_2\| \iff \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{6}$

$$\left.\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array}\right\} \iff \begin{cases} a - b - c = 0 \\ 3b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a - b = c \\ b = -c \end{cases} \quad \text{i.e } a = c + b = 0$$

$$\iff (a, b, c) = (0, -c, c)$$

$$③ \iff 0^2 + 2c^2 = 6$$

$$\iff c^2 = 3$$

$$\iff c = \pm\sqrt{3}$$

Ainsi $v_3 = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ convient

19. d. $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

or (v_1, v_2, v_3) libre car composée de vecteurs deux à deux orthogonaux

donc (v_1, v_2, v_3) libre de cardinal 3 ~~[illegible]~~ qui correspond à la dimension de $\mathbb{R}^3$; on a bien (v_1, v_2, v_3) base de $\mathbb{R}^3$

19. e. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\rho(v_2) = \alpha v_2 + \beta v_3 \iff \begin{cases} \alpha + \beta\sqrt{3} = -2 \\ 2\alpha = -1 \\ \alpha + \beta\sqrt{3} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\rho(v_3) = \gamma v_2 + \delta v_3 \iff \begin{cases} 2\gamma = -\sqrt{3} \\ \gamma + \delta\sqrt{3} = -\sqrt{3} \\ \gamma - \delta\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \delta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

19. f. $\rho(v_2) = -\frac{1}{2} v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_3$

$\rho(v_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_2 + \left(-\frac{1}{2}\right) v_3$

$\rho(v_1) = v_1$

$$\boxed{\text{D'où } \underset{(v_1, v_2, v_3)}{\mathrm{Mat}}(\rho) = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

19. g. $-\frac{2\pi}{3}$ convient

CAS GÉNÉRAL

20. $-1 \notin S(C)$

20.a -1 n'est pas valeur propre de C ni de C^T

donc $\mathrm{Ker}(C+I_3) = (0)$

et $\mathrm{Ker}(C^T+I_3) = (0)$

i.e $\underline{C^T + I_3 \text{ est inversible}}$

20.b
$$(C^T+I_3)(C-I_3) = C^T(C-I_3) + I_3(C-I_3)$$
$$= C^TC - C + C - I_3$$
$$= I_3 - I_3$$
$$= (0)$$

D'où $\underline{(C^T+I_3)(C-I_3) = (0)}$

20.c Soient $[C]_{i,j}$ les coefficients de C

et $[C^T]_{i,j}$ les coefficients de C^T

On a $[C^T]_{i,j} = [C]_{j,i}$

et $[C^T]_{i,i} = [C]_{i,i}$

pour $i,j \in [\![1,3]\!]$

Donc pour $i \in [\![1,3]\!]$

$$[C-C^T]_{i,i} = [C]_{i,i} - [C^T]_{i,i}$$
$$= 0 \quad \circledast$$

Et pour $i,j \in [\![1,3]\!]^2$, $i \neq j$

$$[C-C^T]_{i,j} = [C]_{i,j} - [C^T]_{i,j}$$
$$= [C^T]_{j,i} - [C]_{j,i}$$
$$= -[C-C^T]_{j,i}$$

Donc les valeurs de la diagonale sont nulles $\circledast$

et les autres correspondent à l'opposé ~~des coefficients~~

Copie anonyme - n°anonymat : 468853

Emplacement QR Code

Filière : B/L

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

de la valeur qui, dans la matrice, leur est symétrique.

D'où l'existence des réels a, b, c tels que $C - C^T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

20.d. ~~Soit $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(C - C^T)$~~

~~On a $\begin{cases} -bx - cy = 0 \\ -ax + cz = 0 \\ ay + bz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -bx - cy = 0 \end{cases}$~~

Par calcul on trouve par exemple que $\begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(C - C^T)$

Cela suffit à montrer que $\mathrm{Ker}(C - C^T) \neq (0)$ à condition que a, b, c ne soient pas tous trois égaux à 0.

J'admets que a, b, c ne sont pas tous trois égaux à 0.

$\mathrm{Ker}(C - C^T) \neq (0)$

21. On ne suppose plus que $-1 \notin S(C)$

J'admets le résultat

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

22. Soit $V \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle, $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $Y \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

22. a. $$(H_V)^T = \left(2\frac{VV^T}{\|V\|^2} - I_3\right)^T$$

$$= \frac{2}{\|V\|^2}(VV^T)^T - I_3{}^T$$ linéarité de la transposition

$$= \frac{2}{\|V\|^2}(V^T)^T V^T - I_3$$

$$= \frac{2VV^T}{\|V\|^2} - I_3 = H_V$$

Donc $(H_V)^T = H_V$

$$(H_V)V = 2\frac{VV^T}{\|V\|^2}V - V$$

$$= \frac{2V(V^TV)}{\|V\|^2} - V$$ (associativité du produit matriciel bien défini)

$$= \frac{2V\cancel{\|V\|^2}}{\cancel{\|V\|^2}} - V$$

$$= 2V - V$$

$$= V$$

Donc $(H_V)V = V$

$$(H_V)^T H_V = (H_V)(H_V)$$ vu plus haut

$$= (H_V)^2$$

Donc $(H_V)^T H_V = (H_V)^2$

22. b. $H_V X = Y \iff H_V{}^2 X = H_V Y$

Il faudrait ainsi montrer que $H_V{}^2 = Id$

Je l'admets

23. a $H_{X+Y}X = \left(2\frac{(X+Y)(X^T+Y^T)}{\|X+Y\|^2} - I_3\right)X$

$$= \left(2\frac{X(X^T+Y^T)+Y(X^T+Y^T)}{\|X+Y\|^2}X - X\right)$$

$$= \left(2\frac{XX^TX+XY^TX+YX^TX+YY^TX}{\|X+Y\|^2} - X\right)$$

$$= \left(2\frac{X\|X\|^2+Y\|X\|^2+XY^TX+YY^TX}{\|X+Y\|^2} - X\right)$$

Mon calcul n'aboutit pas.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 019 711

/