UCC 812 MATHÉMATIQUES (Khâgne S) J.6134

Sujet commun : ENS Ulm et Cachan

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 4 pages

Calculatrice autorisée

Analyse et probabilités

Les parties II et III sont indépendantes, mais utilisent toutes deux les résultats de la partie I.

Partie I

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-tx}\, dt$.

1. a. Déterminer le domaine de définition de g_n.

1. b. Pour $x > 0$, trouver une relation de récurrence entre $g_n(x)$ et $g_{n+1}(x)$.

En déduire la valeur de $g_n(x)$ pour $x > 0$.

1. c. Montrer que g_n est dérivable et vérifier que, pour tout $x > 0$, $g_n'(x) = -g_{n+1}(x)$.

2. Soit β un nombre réel strictement positif.

On définit la fonction f par $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\beta^2} e^{-t/\beta} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. a. Vérifier que f est la densité d'une variable aléatoire.

Soit alors X une variable aléatoire admettant f comme densité. On dit que X suit une loi gamma de paramètre β, notée $\gamma(\beta)$.

2. b. On appelle **mode de X**, s'il existe, un réel t_0 tel que : pour tout t réel, $f(t) \leq f(t_0)$.

Déterminer le (ou les) mode(s) de X.

2. c. Montrer que la fonction de répartition de X, notée F, est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, puis la calculer.

2. d. Tracer la courbe représentative de F (on cherchera ses points d'inflexion éventuels et l'on étudiera F au voisinage de zéro en précisant la tangente et la position de la courbe par rapport à cette tangente).

2. e. Déterminer l'espérance de X et sa variance.

3. Soit X_α une variable aléatoire suivant une loi gamma de paramètre α, on notera f_α sa densité et F_α sa fonction de répartition. Soit X_β une variable aléatoire suivant une loi gamma de paramètre β, on notera f_β sa densité et F_β sa fonction de répartition. On suppose que : $\beta > \alpha$.

3. a. On appelle $\mathcal{C}_\alpha$ (respectivement $\mathcal{C}_\beta$) la courbe représentative de f_α (respectivement de f_β). Déterminer la position relative de ces deux courbes.

3. b. Même question pour les courbes représentatives de F_α et de F_β.

4. **4. a.** Soit h la fonction définie par $h(u) = E(e^{uX})$. Pour quelles valeurs de u, h est-elle définie ? Calculer alors $h(u)$ et vérifier que $h'(0) = E(X)$.

4. b. Déterminer la densité de la variable aléatoire $Y = e^{-X}$ et calculer son espérance.

Tournez la page S.V.P.

Partie II

1. Y désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} k\, P(Y = k) = \sum_{k=1}^{n} P(Y \geq k) - n\, P(Y \geq n + 1)$$

1. b. On suppose que Y suit une loi géométrique de paramètre p et on pose $q = 1 - p$.

Déduire de 1. a. : Pour tout $q \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\, q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

2. Soit X une variable aléatoire continue, positive, admettant une densité g. Si x est un réel, on note $[x]$ la partie entière de x et l'on définit la variable aléatoire Z par $Z = [X]$.

2. a. Déterminer la loi de Z à l'aide de la fonction g.

2. b. Montrer que Z possède une espérance si et seulement si X en possède une et que dans ce cas : $E(Z) \leq E(X) \leq E(Z) + 1$.

3. *Application :* X est une variable aléatoire suivant une loi gamma de paramètre $\beta = 1$.

3. a. Déterminer l'espérance de Z où $Z = [X]$.

3. b. Déterminer la loi de Z.

Partie III

1. La durée du processus d'atterrissage d'un avion est le temps T, mesuré en minutes, qui s'écoule depuis la prise en charge par la tour de contrôle jusqu'à l'immobilisation de l'avion sur la piste. Dans un certain aéroport, on estime que T est une variable aléatoire réelle continue, suivant une loi gamma de paramètre $\beta = 0{,}25$.

1. a. Quelle est la durée moyenne du processus d'atterrissage ?

1. b. Quelle est la probabilité pour que T soit inférieur à 4 minutes 30 secondes sachant qu'il dépasse 3 minutes.

2. On suppose que n avions atterrissent successivement sur cet aéroport, que les durées d'atterrissage de chacun d'entre eux suivent la loi T et sont indépendantes.

2. a. Soit Y la durée minimale d'atterrissage observée sur ces n avions.

Déterminer la loi de Y.

2. b. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'avions dont le temps d'atterrissage est supérieur à 3 minutes. Déterminer la loi de X.

3. Dans un autre aéroport, on estime que T est une variable aléatoire réelle continue, suivant une loi gamma de paramètre β inconnu. On suppose que m avions atterrissent successivement sur cet aéroport, que les durées d'atterrissage de chacun d'entre eux suivent la loi T et sont indépendantes. On note $T_1, T_2, \ldots, T_m$ la durée d'atterrissage de chacun de ces m avions.

Pouvez-vous proposer un estimateur sans biais de β ?

Algèbre

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

Dans tout le problème n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$, I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle la définition suivante :

Si P est un polynôme de degré n à coefficients réels défini par :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $P(M)$ la matrice définie par le polynôme matriciel :

$$P(M) = a_0 I_n + a_1 M + a_2 M^2 + \dots + a_{n-1} M^{n-1} + a_n M^n.$$

1. *Préliminaire (étude de l'application trace)*

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Tr (A) désigne la trace de la matrice A, c'est à dire la somme des éléments de la diagonale de A.

Si on note $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ alors $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1.a. Montrer que l'application Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

1.b. Prouver que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

1.c. On suppose que A et D sont deux matrices semblables.
Montrer qu'alors : $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D)$.

Dans toute la suite du problème on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable ayant n valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ réelles distinctes et on pose : $P(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\dots(x - \lambda_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$.

L'objet de ce problème est de fournir une méthode permettant de déterminer les coefficients du polynôme P associé à la matrice A et, lorsque la matrice A est inversible, de calculer son inverse.

Tournez la page S.V.P.

2. **2.a.** Prouver que : pour tout k de $\mathbb{N}^*$ $\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

2.b. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$ on pose : $S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

On considère le système linéaire dont les inconnues sont $u_1, u_2, \dots, u_n$, défini par les n équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 + u_1 = 0 \\ \text{et pour tout k entier naturel de } [2, n] : \\ S_k + u_1 S_{k-1} + u_2 S_{k-2} + \dots + u_{k-2} S_2 + u_{k-1} S_1 + k\, u_k = 0 \end{array}\right.$$

2.b.1. Justifier que le système précédent admet une solution unique.

2.b.2. Vérifier que : $\left\{\begin{array}{l} u_1 = -S_1 = a_{n-1} \\ u_2 = \frac{-1}{2}(S_2 + u_1 S_1) = a_{n-2} \end{array}\right.$

On admet pour la suite que la solution du système est le n-uplet des coefficients du polynôme P, plus précisément : pour tout k entier naturel de $[1, n]$, $u_k = a_{n-k}$.

3. **3.a.** Montrer que $P(A) = 0_n$.

3.b. Prouver l'équivalence : A inversible $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$.
Montrer que la matrice A^{-1} lorsqu'elle existe s'écrit comme un polynôme en A.

4. *Etude d'une suite de matrices*

Pour tout k entier naturel de $[1, n]$ on définit les matrices B_k et les réels d_k par :

$$\left\{\begin{array}{lll} & d_1 = -\mathrm{Tr}(A) & B_1 = A + d_1 I_n \\ \text{pour tout k entier naturel de } [2, n] & d_k = \frac{-1}{k}\mathrm{Tr}(B_{k-1} A) & B_k = B_{k-1} A + d_k I_n \end{array}\right.$$

4.a. Etablir que pour tout k entier de $[1, n]$ $B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i}$

4.b. Pour tout k entier naturel de $[1, n]$, calculer le réel d_k en fonction de $\mathrm{Tr}(A^i)$ pour $i \in [1, k]$ $\boxed{\text{et}}$ de d_i pour $i \in [1, k-1]$.
En déduire que : $d_k = a_{n-k}$, puis que $B_n = 0_n$.

4.c. Prouver que : A inversible $\Leftrightarrow d_n \neq 0$. Exprimer A^{-1} lorsqu'elle existe en fonction de B_{n-1} et d_n.

4.d. *Application* : on donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.d.1. Vérifier que les valeurs propres de A sont : 1, 3, 5.

4.d.2. Prouver que A est inversible et utiliser la méthode étudiée ci-dessus pour calculer A^{-1}.