PROBLÈME 1

La partie I, *la partie* II 1.-2. *et la partie* III 1.-2.-3.-4. *peuvent être traitées indépendamment.*

Soit φ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x(x-1) = x^2 - x$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_0(x) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(x) = \frac{d^n(\varphi^n)}{dx^n} = \frac{d^n((x^2-x)^n)}{dx^n}$$

Partie I

Dans cette partie, on étudie les propriétés des polynômes P_n.

1. Calculer P_0, P_1, P_2 et déterminer leurs racines. Calculer $\int_0^1 P_i(x)dx$, pour $i = 1$ et $i = 2$.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme de degré n, dont on précisera le coefficient dominant.

   (b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On suppose dans la suite de cette partie que $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Montrer que pour tout $j \in [0, n-1]$, $\dfrac{d^j(\varphi^n)}{dx^j}$ est un polynôme de degré $2n - j$. Montrer que 0 et 1 sont des racines de ce polynôme d'ordre de multiplicité au moins $n - j$.

   (b) Montrer que pour tout $j \in [0, n]$, $\dfrac{d^j(\varphi^n)}{dx^j}$ admet au moins j racines distinctes dans l'intervalle $]0, 1[$.

   (c) Montrer que pour tout $j \in [0, n]$, $\dfrac{d^j(\varphi^n)}{dx^j}$ admet exactement j racines simples dans $]0, 1[$.(En particulier, P_n admet exactement n racines simples dans $]0, 1[$).

4. (a) A l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [0, n-1]$,

$$\int_0^1 P_n(x)P_k(x)dx = 0$$

   (b) En déduire que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\int_0^1 P_n(x)Q(x)dx = 0$$

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ n réels distincts de l'intervalle $]0, 1[$. Pour $i \in [1, n]$, soit

$$L_i(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n) = \prod_{1 \le j \le n, j \ne i} (x - x_j)$$

1. (a) Vérifier que L_i est un polynôme de degré $n - 1$ pour lequel $L_i(x_i) \ne 0$. Calculer $L_i(x_j)$ pour $j \in [1, n]$, $j \ne i$.

   (b) Montrer que la famille $(L_i)_{1 \le i \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Montrer qu'il existe une unique famille $(\beta_i)_{1 \le i \le n}$ de réels, dont on donnera l'expression en fonction des polynômes $(L_i)_{1 \le i \le n}$, telle que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a

$$\int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=1}^n \beta_i P(x_i) \qquad \text{(A)}$$

3. On suppose que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les n racines du polynôme P_n défini dans la partie I. Montrer que l'égalité (A) ci-dessus est alors vérifiée pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. (*On pourra utiliser la division euclidienne de $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ par le polynôme P_n*).

4. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$\int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Partie III

Dans cette partie, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue fixée.
Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$G(P) = \int_0^1 (f(x) - P(x))^2 dx$$

Le but de la partie III est de montrer qu'il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ réalisant le minimum de G sur $\mathbb{R}_n[X]$, c'est à dire tel que la propriété (B) ci-dessous soit satisfaite:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad G(P) \ge G(P_f) \qquad \text{(B)}$$

1. Montrer que G définit une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_+$ et que

$$G(P) = 0 \Leftrightarrow P(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in [0, 1]$$

En déduire que si f est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, le minimum de G sur $\mathbb{R}_n[X]$ est nul et qu'il est atteint en l'unique polynôme $P_f = f$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que pour tous polynômes $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$G(P+\lambda Q) = a\lambda^2 - 2b\lambda + c$$

avec

$$a = \int_0^1 Q^2(x)dx, \quad b = \int_0^1 (f(x) - P(x))Q(x)dx, \quad c = G(P)$$

3. On suppose qu'il existe un polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que la propriété (B) soit satisfaite.

   (a) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non nul. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $g(\lambda) = G(P_f + \lambda Q)$. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ainsi définie atteint son minimum en $\lambda = 0$.

   (b) En utilisant l'expression obtenue à la question 2, en déduire que l'on a

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \int_0^1 (f(x) - P_f(x))Q(x)dx = 0$$

4. On suppose à présent qu'il existe un polynôme $P^* \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \int_0^1 (f(x) - P^*(x))Q(x)dx = 0. \tag{C}$$

   (a) Montrer que l'on a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$

$$G(P^* + \lambda Q) \geq G(P^*)$$

   (b) Montrer que P^* satisfait la propriété (B).

5. Montrer que P^* satisfait la propriété (C) si et seulement si

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad \int_0^1 P^*(x)P_j(x)dx = \int_0^1 f(x)P_j(x)dx,$$

   où les polynômes $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ont été définis dans la partie I.

6. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P^* \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant la propriété (C). On cherchera P^* sous la forme $P^*(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i(X)$.

7. Conclure sur l'existence et l'unicité d'un polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant la propriété (B).

8. Dans cette question, on prend $f(x) = e^x$ et $n = 1$. Déterminer P_f.

9. Soit $P_f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ l'écriture de P_f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $\gamma_k = \int_0^1 f(x)x^k dx$. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{a_l}{l+k+1} = \gamma_k$$

10. En déduire que si l'on pose $m_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$, la matrice A de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $A = [m_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n+1}$ est inversible.

PROBLÈME 2

Un joueur lance à pile ou face une pièce telle que la probabilité d'obtenir *Face* lors d'un lancer soit $p \in]0,1[$. Il lance la pièce jusqu'à obtenir *Face* et compte le nombre X de lancers nécessaires. On considère que les lancers sont indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X? Calculer $P(X > a)$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.

Dans la suite du problème, on considère n joueurs ($n \in \mathbb{N}^*$) jouant simultanément au jeu décrit ci-dessus, indépendamment les uns des autres. La probabilité $p \in]0,1[$ d'obtenir *Face* au cours d'un lancer est la même pour tous les joueurs. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que le joueur i obtienne *Face*.

2. Quelle est la loi de X_i?

3. On pose $A_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Soit F_n la fonction de répartition de A_n.
   Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$,

$$F_n(a) = 1 - (1-p)^{na}$$

   Quelle est la loi de A_n? Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$$

   Comment interpréter ce résultat?

4. On pose $B_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Soit G_n la fonction de répartition de B_n. Calculer $G_n(a)$ pour tout $a \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$$

   Comment interpréter ce résultat?

5. Les variables aléatoires A_n et B_n sont-elles indépendantes?