UHCE 454

J. 0737

SESSION 2004

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines – Cachan – ENSAE

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 4 pages

L'usage de la calculatrice est autorisé

Tournez la page S.V.P.

N.B. Le sujet est constitué de deux problèmes et d'un exercice que le candidat peut aborder dans l'ordre de son choix. Les deux problèmes ainsi que l'exercice sont indépendants exception faite du résultat final de l'exercice qui intervient dans une question du deuxième problème où son utilisation est explicitement réclamée.

Problème 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On rappelle qu'un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ est appelé hyperplan. On note $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

Première Partie

1. Soit ϕ un élément non nul de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Prouver que le noyau $\mathrm{Ker}(\phi)$ de l'application linéaire ϕ est un hyperplan.

2. Réciproquement, si H est un hyperplan, montrer qu'il existe $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ tel que $H = \mathrm{Ker}(\phi)$.

Soient ϕ et ψ deux éléments non nuls de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ tels que $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi)$

3. Montrer qu'il existe $v \in E$ tel que $\phi(v) = 1$.

4. Soit $\lambda = \psi(v)$. Prouver que $\psi = \lambda\phi$.

Soit H un hyperplan. On définit $D_H^* = \{\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \,; H \subseteq \mathrm{Ker}(\phi)\}$.

5. Démontrer que D_H^* est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ dont on calculera la dimension.

On note I l'application identité dans E. On appelle transvection toute application linéaire de E dans E possédant les deux propriétés suivantes: $\mathrm{Ker}(f - I)$ est un hyperplan (qu'on appellera base de f) et l'image $\mathrm{Im}(f - I)$ de l'application $f - I$ est incluse dans $\mathrm{Ker}(f - I)$.

Deuxième Partie

6. Si f est une transvection, montrer que $\mathrm{Im}(f - I)$ est une droite qu'on appellera désormais direction de f.

Pour tout ϕ élément non nul de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et tout u élément non nul de $\mathrm{Ker}(\phi)$, on définit l'application linéaire $f_{\phi,u}$ par

$$f_{\phi,u}(x) = x + \phi(x)\, u, \text{ pour tout } x \in E. \qquad (1)$$

7. Démontrer que l'application $f_{\phi,u}$ ainsi définie est une transvection dont on précisera la base et la direction.

Problème 2

Notations: Pour tout couple de réels positifs ou nuls a et b, on note $a \wedge b$ le plus petit d'entre eux. Si A est un événement, on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire valant 1 si A est réalisé et 0 sinon. Cette variable suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Rappel: Dire qu'une suite de variable aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi normale centrée et réduite signifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(Z_n \leq t)$ converge vers $(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}dx$ lorsque n tend vers l'infini.

On admettra que cette propriété de convergence en loi se caractérise également par le fait que $\mathbb{E}(f(Z_n))$ converge vers $(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-x^2/2}dx$ pour toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Préliminaires

Soit Y une variable aléatoire positive ou nulle et t un nombre réel strictement positif.

19. Soit s un nombre réel tel que $s \geq 1$. Démontrer que si Y^s est intégrable alors
$$\mathbb{E}\left(Y^{s-1}\mathbb{1}_{\{Y\geq t\}}\right) \leq \mathbb{E}(Y^s)/t$$

20. Prouver que si Y est intégrable alors pour tout $t > 0$
$$\mathbb{P}(Y \geq t) \leq \mathbb{E}(Y)/t$$

21. Prouver que si Y est de carré intégrable alors
$$\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y \wedge t) \leq \mathbb{E}\left(Y^2\right)/t.$$

22. Si Y prend de plus un nombre fini de valeurs dont la plus grande est notée M. Etablir que pour tout nombre réel $s \geq 1$
$$\mathbb{E}(Y^s) = \int_0^M s x^{s-1}\mathbb{P}(Y > x)\, dx.$$

On note désormais pour tout entier m
$$u_m = \int_0^{\infty} x^m e^{-x^2/2}dx.$$

23. Démontrer pour tout entier non nul m la relation de récurrence $u_{m+1} = m u_{m-1}$.

24. En déduire la valeur de u_m pour tout entier m en discutant suivant la parité de m.

On considère à présent des épreuves de Bernoulli indépendantes $X_1, ..., X_n$ et de même probabilité de succès notée $p \in \,]0,1[$. On définit la somme totale $S_n = X_1 + ... + X_n$ et on pose enfin $\widetilde{S}_n = S_n - np$.

On souhaite à présent montrer que toute transvection peut s'écrire sous la forme (1). On se donne donc une transvection f et on souhaite construire $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ ainsi que $u \in \operatorname{Ker}(\phi)$ tous deux non nuls tels que $f_{\phi,u} = f$.

8. Justifier l'existence de ϕ élément non nul de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ tel que $\operatorname{Ker}(\phi) = \operatorname{Ker}(f - I)$.

9. Si v est un vecteur de E tel que $\phi(v) = 1$, vérifier que pour tout $x \in E$ le vecteur $x - \phi(x)v$ appartient à $\operatorname{Ker}(f - I)$.

10. Montrer qu'on peut choisir v dans E tel que $\phi(v) = 1$ et $u = f(v) - v$ soit non nul puis conclure.

Troisième Partie

Soit $GL(E)$ le groupe des applications linéaires inversibles de E sur E. Le but de cette dernière partie est d'établir que l'ensemble

$$Z = \{g \in GL(E) \,;\, g \circ f = f \circ g \text{ pour tout } f \in GL(E)\}$$

est réduit aux homothéties λI, avec λ réel non nul.

11. Montrer que toute transvection f est élément de $GL(E)$.

12. Si f est une transvection de base H et de direction D, prouver que pour tout $g \in GL(E)$, $g \circ f \circ g^{-1}$ est une transvection de base $g(H)$ et de direction $g(D)$.

13. En déduire que si $g \in Z$ alors pour toute droite D de E on a $g(D) = D$.

14. Conclure.

Exercice

Soit p un nombre réel appartenant à $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$ et on définit pour tout nombre réel x

$$\phi_p(x) = \ln\left[pe^{qx} + qe^{-px}\right]. \tag{2}$$

15. Justifier la dérivabilité de ϕ_p sur $\mathbb{R}$ et calculer $\phi_p(0)$ ainsi que $\phi_p'(0)$.

16. Montrer que la dérivée seconde de ϕ_p peut s'écrire en tout point x sous la forme

$$\phi_p''(x) = \frac{A_p(x)\, B_p(x)}{(A_p(x) + B_p(x))^2},$$

avec $A_p(x) > 0$, $B_p(x) > 0$.

17. Montrer que $\phi_p''(x) \leq 1/4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

18. En déduire que $\phi_p(x) \leq x^2/8$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Première Partie

25. Rappeler la loi de S_n.

26. Montrer que $\mathbb{P}\left(e^{x\widetilde{S}_n} \geq e^y\right) \leq \mathbb{E}\left(e^{x\widetilde{S}_n}\right) e^{-y}$ pour tout $y \geq 0$ et tout $x > 0$.

27. Exprimer $\mathbb{E}\left(e^{x\widetilde{S}_n}\right)$ à l'aide de $\phi_p(x)$ défini en (2).

28. En déduire pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x > 0$ la majoration
$$\mathbb{P}\left(\widetilde{S}_n \geq n\varepsilon\right) \leq \exp\left[-n\left(x\varepsilon - \phi_p(x)\right)\right].$$

29. En conclure en utilisant l'inégalité finale obtenue dans l'exercice que pour tout $\varepsilon > 0$ l'inégalité suivante est valide
$$\mathbb{P}\left(\widetilde{S}_n \geq n\varepsilon\right) \leq \exp\left(-2n\varepsilon^2\right).$$

30. Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$
$$\mathbb{P}\left(\left|\widetilde{S}_n\right| \geq n\varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-2n\varepsilon^2\right).$$

Deuxième Partie

Soit k un entier non nul. On définit $Z_n = \widetilde{S}_n/\sqrt{np(1-p)}$. Le but de cette partie est de prouver que $\mathbb{E}\left[Z_n^{2k}\right]$ converge vers une limite l_k lorsque n tend vers l'infini et d'identifier cette limite.

31. Prouver que pour tout entier $k \geq 1$
$$\mathbb{E}\left(\frac{\widetilde{S}_n^{2k}}{n^k}\right) \leq 4k\int_0^{\infty} t^{2k-1}e^{-2t^2}dt.$$

32. En déduire que
$$\mathbb{E}\left(\frac{\widetilde{S}_n^{2k}}{n^k}\right) \leq 2^{-k+1}k!.$$

Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et M un nombre réel positif.

33. Démontrer que $\mathbb{E}\left(Z_n^{2k} \wedge M^{2k}\right)$ converge vers $\mathbb{E}\left(Z^{2k} \wedge M^{2k}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

34. Prouver l'existence d'une constante C indépendante de n (mais qui peut dépendre de p et k), telle que pour tout n
$$\mathbb{E}\left(Z_n^{2k}\right) - \mathbb{E}\left(Z_n^{2k} \wedge M^{2k}\right) \leq CM^{-2k}$$

35. Contrôler de manière analogue $\mathbb{E}\left(Z^{2k}\right) - \mathbb{E}\left(Z^{2k} \wedge M^{2k}\right)$.

36. En choisissant de manière adéquate M, en déduire la convergence de $\mathbb{E}\left(Z_n^{2k}\right)$ vers $l_k = \mathbb{E}\left(Z^{2k}\right)$

37. Calculer l_k.