UHCE 754

SESSION 2007

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lettres et Sciences Humaines – Cachan - ENSAE

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 6 pages

L'usage de la calculatrice est interdit

Tournez la page S.V.P.

Les deux exercices et le problème qui suivent sont indépendants les uns des autres et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Dans l'ensemble du présent sujet, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes. Il est demandé de numéroter soigneusement les réponses.

Exercice I

1. Soit α et β deux nombres réels strictement positifs, et g la fonction suivante :

$$g : h \in]0, +\infty[\longmapsto \frac{\alpha}{h} + \frac{h}{2}\beta .$$

Etudier les variations de g. En déduire que g admet un minimum, dont on précisera la valeur et l'antécédent en fonction de α et β.

2. Soit a et b deux nombres réels distincts et f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle réel $I = [\min(a,b), \max(a,b)]$. On note f' et f'' ses dérivées première et seconde. Montrer qu'il existe $c \in I$, avec $c \neq a$, $c \neq b$, tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c) .$$

On pourra considérer la fonction

$$\varphi : x \in I \longmapsto f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - A\frac{(b-x)^2}{2}$$

où A est une constante à préciser.

3. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(a) On dit que $M \in [0, +\infty[$ est un majorant de $|f|$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$. On suppose que $|f|$ admet un majorant M_0 et que $|f''|$ admet un majorant M_2. Montrer que tout $h > 0$, $|f'|$ admet pour majorant

$$\frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2 .$$

On pourra pour cela appliquer le résultat de la question 2. à des couples $(x, x+h)$ d'une part, $(x, x-h)$ d'autre part.

En déduire que $|f'|$ admet $\sqrt{2M_0M_2}$ pour majorant.

(b) Avec les notations précédentes et toujours en utilisant la question 2., montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} f''(t) = 0 \qquad \text{entraîne} \qquad \lim_{t \to +\infty} f'(t) = 0 .$$

Exercice II

On rappelle qu'une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_n$ (prenant chacune un nombre fini de valeurs) converge en probabilité vers $m \in \mathbb{R}$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - m| > \varepsilon) = 0 .$$

$(X_n)_n$ converge en probabilité vers $+\infty$ lorsque pour tout $A > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > A) = 1 .$$

On note respectivement ces convergences $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m$ et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} +\infty$.

Dans tout l'exercice, $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, prenant chacune un nombre fini de valeurs possibles.

1. Lorsque X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $u_n \in [0,1]$, déterminer $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(u_n)_n$ pour que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
   Faire de même pour $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.
   Peut-on avoir $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \ell$ avec $\ell \neq 0$ et $\ell \neq 1$?
2. On suppose dans cette question encore que les X_n suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre $u_n \in [0,1]$. On note $Z_n = X_1 X_2 \ldots X_n$.
   (a) Montrer que $Z_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Quelle est la loi de Z_n ?
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
   (c) Montrer que lorsque $u_n \leq 1 - 1/(n+1)$, alors $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, mais qu'en revanche, pour $u_n = 1 - 1/(n+1)^2$, la suite $(Z_n)_n$ ne converge en probabilité ni vers 0 ni vers 1.
   (d) Soit, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier k, $u_k \geq \alpha$. On veut montrer que $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} +\infty$.
   A cet effet, on pourra commencer par montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq 1) \to 1$ et que, pour tous entiers n et k,
   $$\mathbb{P}(S_{nk} \geq k) \geq \left(\mathbb{P}(S_n \geq 1)\right)^k .$$
3. (On ne spécifie plus dans cette question la loi des X_n.) Montrer que si $\mathbb{E}|X_n| \to 0$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Prouver que la réciproque n'est pas vraie, par exemple en considérant une suite bien choisie de variables aléatoires $(X_n)_n$ toutes d'espérance 1 et ne prenant que deux valeurs.

Problème

Dans tout le problème, E désignera un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$, et u un endomorphisme de E. Pour un entier $k \geq 1$, u^k désigne u composé k fois,

$$u^k = \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{k \text{ termes}} .$$

u^0 est par convention l'endormorphisme identité de E. $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ désigneront respectivement le noyau et l'image de l'application linéaire u.

On dit qu'un endomorphisme u de E est nilpotent s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0_E$ (où 0_E désigne l'endomorphisme nul de E). Pour un tel u, on note ν son indice de nilpotence, c'est-à-dire le plus petit entier k strictement positif tel que $u^k = 0_E$:

$$\nu = \min \left\{ k \geq 1 : u^k = 0_E \right\} .$$

De même, une matrice A est dite nilpotente si l'endormorphisme canoniquement associé est nilpotent, c'est-à-dire s'il existe un entier k tel que $A^k = [0]$ (où $[0]$ désigne la matrice nulle).

Partie 1 (premiers exemples)

1. Montrer que les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sont nilpotentes, mais que

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ne l'est pas.

2. Montrer que les matrices A et B sont respectivement semblables à

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par exemple, (e_1, e_2, e_3) désignant la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on pourra considérer respectivement les systèmes de vecteurs $(6e_1, 4e_1 + 3e_2, e_3)$ et $(5e_1, e_2, -6e_2 + 5e_3)$.

3. A et B sont-elles semblables ?

Partie 2 (préliminaires)

(On ne suppose pas ici que u soit nilpotent.)

1. Montrer les inclusions suivantes,

$$\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \ , \qquad \operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u \ .$$

2. On souhaite caractériser les endomorphismes u pour lesquels E peut s'écrire comme somme directe de $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$, $\quad E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.
   (a) Montrer que si $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$.
   (b) Réciproquement, montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ implique $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} u$, puis que cette somme est en fait directe.
   (c) Donner un exemple d'espace vectoriel E et d'endormorphisme u tels que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne soient pas en somme directe.
3. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $k \geq n_0$,

$$\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{n_0} \ , \qquad \operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^{n_0} \ .$$

   On note $K = \operatorname{Ker} u^{n_0}$, $\quad I = \operatorname{Im} u^{n_0}$.
4. Préciser I et K lorsque u est inversible.
5. Montrer que $E = K \oplus I$.

Partie 3 (étude d'un second exemple)

Soit (dans cette partie uniquement) $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré au plus $n-1$, $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel de tous les polynômes, et D l'application

$$\begin{array}{llll} D: & \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k & \longmapsto & D(P) = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1} \end{array}$$

1. Montrer que D est un endomorphisme.
2. Préciser la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et écrire la matrice de l'application linéaire D sur cette base.
3. Déterminer, pour tout entier $1 \leq k \leq n$, les espaces vectoriels $\operatorname{Ker} D^k$ et $\operatorname{Im} D^k$.
4. D est-elle nilpotente ? Que donne ici la décomposition $E = K \oplus I$ vue à la question 4. de la partie 2 ?

Partie 4

Dans cette partie, on fixe un endomorphisme u non nul et nilpotent d'indice ν.

1. Montrer que $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de u ; l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2. Pour deux ensembles A et B, on note $A \subsetneq B$ lorsque A est strictement inclus dans B, id est, $A \subset B$ mais $A \neq B$.

   (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}$ implique $\operatorname{Ker} u^{k+1} = \operatorname{Ker} u^{k+2}$; et qu'il s'en suit que pour tout entier k, $\operatorname{Ker} u^k \subsetneq E$ implique $\operatorname{Ker} u^k \subsetneq \operatorname{Ker} u^{k+1}$.

   (b) En déduire que pour tout entier $k \geq \nu$,

   $$\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker} u \subsetneq \operatorname{Ker} u^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \operatorname{Ker} u^\nu = \operatorname{Ker} u^k = E \ .$$

   (c) Prouver que $\nu \leq n + 1 - d \leq n$, où $d = \dim \operatorname{Ker} u$ est la dimension de $\operatorname{Ker} u$.

   (d) Montrer que par ailleurs, $\nu \geq n/d$. A cet effet, indiquer préalablement pourquoi, pour tout entier k positif ou nul,

   $$\dim \operatorname{Im} u^k = \dim \operatorname{Im} u^{k+1} + \dim \left(\operatorname{Im} u^k \cap \operatorname{Ker} u\right)$$

   et sommer ces inégalités pour $k = 0, \ldots, \nu - 1$.

   (e) Conclure que $\nu = n$ si et seulement s'il existe $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$, et que dans ce cas, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.

Partie 5

Dans cette partie, on fixe un endomorphisme u nilpotent d'indice ν, et on étudie ses représentations matricielles en fonction de la dimension n de l'espace E.

1. Dans le cas où $n = 2$, montrer que soit $u = 0_E$, soit u admet pour représentation matricielle

   $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   dans une base bien choisie. On pourra prouver l'existence de x tel que $u(x) \neq 0$ et montrer que $(u(x), x)$ est une base de E.

2. On traite maintenant le cas $n = 3$.

   (a) Rappeler pourquoi $\nu \in \{1, 2, 3\}$; et donner la valeur de u, ainsi qu'une représentation matricielle, lorsque $\nu = 1$.

   (b) Lorsque $\nu = 3$, montrer que u admet pour représentation matricielle

   $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   dans une base bien choisie. (On pourra montrer l'existence d'un élément $x \in E$ tel que $u^2(x) \neq 0$.)

(c) Lorsque $\nu = 2$, montrer que $\dim \operatorname{Ker} u = 2$. En déduire que u admet pour représentation matricielle

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dans une base bien choisie. Ici, on pourra considérer x tel que $u(x) \neq 0$ et exhiber une base de la forme $(u(x), x, y)$ pour y à préciser.

(d) Déduire de ce qui précède que, pour tous réels non nuls a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, les matrices

$$C = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 2 & a_3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & a_4 & a_5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

sont respectivement semblables à

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

C' et D' sont-elles semblables ?

3. Lorsque $n = 4$, traiter brièvement les cas $\nu \in \{1, 3, 4\}$ en s'inspirant des questions ci-dessus : donner à chaque fois la représentation matricielle de u dans des bases bien choisies, en termes d'une matrice avec des 0 et des 1.

Dans le cas où $\nu = 2$, montrer que $\dim \operatorname{Ker} u = 2$ ou $\dim \operatorname{Ker} u = 3$. Soit F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$; en considérant une base de F, montrer que u admet pour représentation matricielle dans des bases bien choisies :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ lorsque } \dim \operatorname{Ker} u = 2\,; \quad \text{et} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ lorsque } \dim \operatorname{Ker} u = 3.$$