UHCE 054

SESSION 2010

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Cachan - ENSAE

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Les trois exercices qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Dans chacun de ces exercices, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes, du moment qu'il l'aura clairement indiqué.
Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Il sera fait grand cas lors de la correction de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

Exercice I

(A) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\pi \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \quad .$$

(1) À l'aide de la formule de De Moivre, montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2a) = (\cos(a))^2 - (\sin(a))^2 \qquad \text{(i)}$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \quad . \qquad \text{(ii)}$$

(2) Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, impaire et périodique de période 1.

(3) On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définies au moins sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$,

$$u\left(\frac{x}{2}\right) + u\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2u(x) \quad .$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $x/2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $(x+1)/2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, puis montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

(4) Montrer que $f \in \mathcal{E}$.

(B) Pour tout entier naturel n, on définit la fonction g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \quad g_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k} \quad .$$

(5) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \quad g_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2 - k^2} \quad .$$

(6) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ existe et est finie. On notera $g(x)$ cette limite, ce qui définit une fonction $g : \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

(7) Calculer $g_n(x+1) - g_n(x)$ pour tout entier naturel n et tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. En déduire que g est périodique de période 1.

(8) Montrer que g est impaire.

(9) Montrer que $g \in \mathcal{E}$.

(10) Montrer que pour tout entier n, g_n est continue sur $]0,1[$.

Montrer que si $x \in]0,1[$ et $k \geqslant 2$, alors

$$\left|\frac{2x}{x^2-k^2}\right| \leqslant \frac{8}{3k^2} \ .$$

En déduire une majoration de $|g(x) - g_n(x)|$ indépendante de x pour $x \in]0,1[$.
Prouver enfin que g est continue sur $]0,1[$, et donc que g est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

(C) On souhaite prouver que $f = g$.

(11) Montrer que

$$f(x) - \frac{1}{x}$$

admet une limite quand $x \to 0$ $(x \neq 0)$ et déterminer sa valeur.

(12) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que

$$\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[\ , \quad \left|g_n(x) - \frac{1}{x}\right| \leqslant |x| \left(\frac{2}{1-x^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{8}{3k^2}\right) \ .$$

En déduire que

$$g(x) - \frac{1}{x}$$

admet une limite quand $x \to 0$ $(x \neq 0)$ et déterminer sa valeur.

(13) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x)$ si $x \notin \mathbb{Z}$ et $h(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$.
Montrer que h est périodique de période 1, impaire, et que $h \in \mathcal{E}$.
Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

(14) Montrer que h est majorée, et qu'elle atteint son maximum m en au moins un $x_0 \in [0,1]$.

(15) Déterminer $h(x_0/2)$, puis $h(x_0/2^k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$. Conclure.

Exercice II

On rappelle que si $B(X)$ est un polynôme réel non nul, la division euclidienne d'un polynôme réel $A(X)$ par $B(X)$ fournit deux polynômes réels $S(X)$ (appelé *quotient*) et $R(X)$ (appelé *reste*) uniques tels que

$$A(X) = Q(X)B(X) + R(X)$$

et tels que le degré de $R(X)$ soit strictement inférieur au degré de $B(X)$. On rappelle également que l'ensemble $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes réels de degré strictement inférieur à n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et on appelle la famille de polynômes $(1, X, X^2, \ldots, X^{n-1})$ sa *base canonique.*

Soient $k < n$ deux entiers strictement positifs, et soit $A(X) = \sum_{p=0}^{k} a_p X^p$ un polynôme réel de degré k. On note ϕ^A l'application qui à tout polynôme réel $P(X)$ de degré strictement inférieur à n associe le reste de la division euclidienne de $A(X)P(X)$ par X^n.

(1) Dans cette question seulement, on prend $n = 5$ et $A(X) = X^2 - 1$. Calculer $\phi^A(X^j)$ pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, 4\}$.

(2) Montrer que ϕ^A est une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(3) On note $M^A = \left(M^A_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de ϕ^A dans la base canonique. Montrer que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$M^A_{i,j} = \begin{cases} a_{i-j} & \text{si } i - k \leqslant j \leqslant i \ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(4) Quelles sont les valeurs propres de M^A ? Montrer que ϕ^A est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.

Pour la suite de l'exercice, on admet le résultat suivant : *Soient $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes réels non constants n'admettant aucune racine commune dans $\mathbb{C}$. Il existe un polynôme réel $U(X)$ de degré strictement inférieur à celui de $Q(X)$ et un polynôme réel $V(X)$ de degré strictement inférieur à celui de $P(X)$ tels que $P(X)U(X) + Q(X)V(X) = 1$.*

(5) On suppose que $a_0 \neq 0$. Montrer qu'il existe un polynôme $U(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\phi^U \circ \phi^A$ soit l'application identité de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(6) On suppose, dans cette question seulement, que $A(X) = X^2 - 1$ et $n = 5$. Calculer $\phi^A(X^4 + X^2 + 1)$, puis trouver tous les polynômes $P(X) \in \mathbb{R}_4[X]$ tels que

$$\phi^A\Big(P(X)\Big) = X^4 + X^3 + 1 \ .$$

Exercice III

Un sondeur souhaite déterminer la proportion $\pi \in [0,1]$ de fraudeurs au fisc parmi la population des contribuables français. Il utilise pour cela le procédé suivant : le sondeur choisit indépendamment N individus uniformément dans la population, appelés “sondés”. Le sondeur présente à chaque sondé une urne contenant deux types de boules indiscernables au toucher :

- des boules mentionnant l'inscription “Vous fraudez au fisc”, en proportion $p \in [0,1]$.
- des boules mentionnant l'inscription “Vous ne fraudez pas au fisc”, en proportion $1-p$.

Chaque sondé tire une boule uniformément dans l'urne, lit la phrase qui y est inscrite (sans la communiquer au sondeur), remet la boule dans l'urne, et dit enfin au sondeur si la phrase qu'il a lue à son propos est vraie ou non. On suppose dans tout l'exercice qu'aucun sondé ne ment au sondeur. On note A^c l'événement complémentaire d'un événement A quelconque.

(A) Pour chaque sondé $i \in \{1,\ldots,N\}$, on définit les événements

$$\begin{aligned} B_i &= \{\text{La boule tirée par le sondé } i \text{ indique “Vous fraudez au fisc”}\} \\ \text{et} \quad F_i &= \{\text{Le sondé } i \text{ fraude au fisc}\} \quad . \end{aligned}$$

(1) Soit $i \in \{1,\ldots,N\}$. Exprimer l'événement

$$V_i = \{\text{La phrase lue par le sondé } i \text{ est vraie}\}$$

en fonction de B_i et F_i. En déduire $\mathbb{P}(V_i)$ en fonction de p et π.

(2) On note X le nombre de sondés qui répondent “La phrase est vraie”. Quelle est la distribution de la variable aléatoire X ? Préciser son espérance, sa variance.

(3) On suppose que $\pi \in\,]0,1[$. Montrer que $\mathbb{P}(V_i) > 0$, puis calculer $\mathbb{P}(F_i \mid V_i)$ en fonction de p et π. Pour quelles valeurs de (p,π) a-t-on $\mathbb{P}(F_i \mid V_i) \in \{0,1\}$?

(4) Pour tout $p \in [0,1]$, déterminer l'ensemble des valeurs prises par

$$g(p,\pi) = \frac{p}{p\pi + (1-p)(1-\pi)}$$

lorsque π décrit l'intervalle $]0,1[$. En déduire l'ensemble des valeurs de $p \in [0,1]$ telles que

$$\forall \pi \in\,]0,1[\,, \quad \mathbb{P}(F_i \mid V_i) \leqslant 2\mathbb{P}(F_i) \quad . \qquad (*)$$

(5) Pour quelles valeurs de $p \in [0,1]$ a-t-on simultanément $(*)$ et

$$\forall \pi \in\,]0,1[\,, \quad \mathbb{P}(F_i \mid V_i^c) \leqslant 2\mathbb{P}(F_i) \ ?$$

(B) On suppose désormais que $p \neq 1/2$. Le sondeur propose d'estimer π à l'aide de

$$\widehat{\pi}_N = \frac{N(p-1)+X}{N(2p-1)} \quad .$$

(6) Calculer le biais de $\widehat{\pi}_N$. Montrer que lorsque N tend vers l'infini, $\widehat{\pi}_N$ converge en probabilité vers une limite à préciser.

(7) Montrer que la variance de $\widehat{\pi}_N$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{F(p,\pi)}{N} \ ,$$

pour une fonction $F : [0,1/2[\cup]1/2,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ à préciser.

(8) Montrer que lorsque N tend vers l'infini, $\sqrt{N}(\widehat{\pi}_N - \pi)$ converge en loi vers une limite que l'on exprimera à l'aide de $F(p,\pi)$.

(9) Le sondeur souhaite choisir p pour que la variance de $\widehat{\pi}_N$ soit aussi petite que possible dans le pire des cas, la vraie valeur de π étant inconnue *a priori.* Calculer la variance de $\widehat{\pi}_N$ dans le pire des cas, c'est-à-dire, calculer

$$M(p) = \sup_{\pi\in[0,1]} \left\{ \frac{F(p,\pi)}{N} \right\} \quad \text{pour tout } p \in [0,1/2[\cup]1/2,1] \ .$$

Pour quelle(s) valeur(s) de $p \in [0,1/2[\cup]1/2,1]$ la quantité $M(p)$ est-elle minimale ?

(10) Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un intervalle de confiance de probabilité de couverture $1-\alpha$ pour π de la forme

$$[\widehat{\pi}_N - t_{\alpha,N,p} \, , \, \widehat{\pi}_N + t_{\alpha,N,p}] \ ,$$

où $t_{\alpha,N,p}$ est un réel positif à préciser, ne dépendant que de α , N et p .