Les trois exercices qui suivent sont indépendants — à l'exception de la dernière question de l'exercice 3, comme précisé dans son énoncé — et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat.
Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes, du moment qu'il l'aura clairement indiqué.
Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Il sera fait grand cas lors de la correction de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

Exercice 1

Soit la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

et P le polynôme défini par $P(X) = X^3 - X^2 - 7X + 11$. On note par convention $P(A)$ la matrice $P(A) = A^3 - A^2 - 7A + 11I_3$ où I_3 désigne la matrice identité de taille 3×3.

(1) Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que $P(A)$ est la matrice nulle.

(2) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et A^2.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. Calculer $P(A)V$ de deux manières pour en déduire que $P(\lambda) = 0$.

Le but des questions 4 à 6 est de montrer que, réciproquement, toutes les racines de P sont des valeurs propres de A. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, on s'intéresse au système linéaire

$$(L) \begin{cases} (2-\lambda)x - y + z & = 0 \\ x - \lambda y - z & = 0 \\ 2x - 4y - (1+\lambda)z & = 0 \end{cases}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Résoudre (L) lorsque $\lambda = 2$.

(5) En supposant que $\lambda \neq 2$, montrer à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss que (L) est équivalent au système

$$\begin{cases} 2x & -4y & -(1+\lambda)z & = 0 \\ & (2-\lambda)y & +\frac{\lambda-1}{2}z & = 0 \\ & & \frac{cP(\lambda)}{2-\lambda}z & = 0 \end{cases},$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.

(6) Montrer que si λ est racine de P alors (L) admet des solutions non nulles.
En conclure que l'ensemble des valeurs propres de A est l'ensemble des racines de P.

(7) Déterminer le cardinal de l'ensemble des racines de P : (i) dans $\mathbb{R}$, et (ii) dans $\mathbb{C}$.

(8) A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Exercice 2

Pour tout réel $r \geqslant 1$, soit f_r la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$f_r(x) = \frac{\exp(-rx)}{\sqrt{1-x}} \quad ,$$

et l'on pose

$$I(r) = \int_0^1 f_r(x)\, dx \quad .$$

(1) Dresser le tableau de variations de la fonction f_r. Représenter sommairement son graphe pour $r = 8$.

(2) Montrer que $I(r)$ est une intégrale convergente pour tout réel $r \geqslant 1$.

On écrit dans la suite $I(r) = I_1(r) + I_2(r) + I_3(r)$, avec

$$I_1(r) = \int_0^{r^{-2/3}} \exp(-rx)\, dx \quad ,$$

$$I_2(r) = \int_0^{r^{-2/3}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \right) \exp(-rx)\, dx \quad ,$$

$$I_3(r) = \int_{r^{-2/3}}^1 \frac{\exp(-rx)}{\sqrt{1-x}}\, dx \quad .$$

(3) Montrer que quand r tend vers l'infini on a

$$I_1(r) = \frac{1}{r}\big(1 + o(1)\big) \quad .$$

(4) Montrer que pour tout réel y strictement compris entre 0 et 1, on peut écrire

$$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-y}} \leqslant 1 + \frac{y}{2(1-y)^{3/2}} \quad .$$

(5) Montrer que pour tout $r \geqslant 1$,

$$0 \leqslant I_2(r) \leqslant c_2 \left(1 - r^{-2/3}\right)^{-3/2} \frac{1}{r^{4/3}} \quad ,$$

où c_2 est une constante dont on précisera la valeur.

(6) Montrer que pour tout $r \geqslant 1$ on a

$$0 \leqslant I_3(r) \leqslant c_3 \exp\left(-r^{1/3}\right) \quad ,$$

où c_3 est une constante dont on précisera la valeur.

(7) En déduire que $I(r)$ est équivalent à $1/r$ quand r tend vers l'infini.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3

On considère une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose qu'elles admettent une espérance $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ inconnue et une variance $\sigma^2 = \mathbb{V}ar[X_1] = 1$.

On cherche à estimer progressivement μ, en construisant récursivement une suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ d'estimateurs tels que M_n est une fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uniquement. Pour cela, on considère une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\gamma_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $0 < \gamma_n < 1$. On se propose d'étudier la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $M_1 = X_1$ et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$M_n = (1-\gamma_n)M_{n-1} + \gamma_n X_n \ .$$

Pour tout entier n strictement positif, on pose $v_n = \mathbb{V}ar[M_n]$.

(1) Montrer que pour tout entier n strictement positif, on a $\mathbb{E}[M_n] = \mu$.

(2) Dans cette question seulement, on considère la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \geqslant 1, \quad \gamma_n = \frac{1}{n} \ .$$

Pour tout entier n strictement positif, montrer que l'on a

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \ ,$$

puis calculer v_n.

(3) Dans cette question seulement, on suppose qu'il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \geqslant 2$, on ait $\gamma_n = \varepsilon$. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite qu'on exprimera en fonction de ε.

(4) Montrer que pour tout entier n strictement positif,

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} X_k \ ,$$

où, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{k,n}$ est défini par

$$a_{k,n} = \gamma_k \prod_{i=k+1}^{n} (1-\gamma_i) \ ,$$

avec par convention $\prod_{i=n+1}^{n}(1-\gamma_i) = 1$.

(5) Que vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}$?

(6) Montrer que pour tout entier n strictement positif on a

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^2 \ .$$

Décroissance lente des poids

Dans les questions 7 à 9, on suppose que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $\gamma_n = n^{-1/4}$.

(7) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(1 - n^{-1/4}\right)^{2j}}{\sqrt{n-j}} \ .$$

(8) Montrer que pour tout entier $j \geqslant 0$ et pour tout entier entier $n \geqslant 1$ on a

$$\left(1 - n^{-1/4}\right)^{2j} \leqslant \exp\left(-2jn^{-1/4}\right) \ .$$

Conclusion

Avertissement : *La question 9 qui suit peut nécessiter de faire appel à un ou plusieurs résultats prouvés au cours de l'Exercice 2.*

(9) (a) Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note n^* le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{1}{4}n^{1/4}$. Montrer que pour tout entier n strictement positif on a

$$v_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n-n^*-1} \frac{\exp\left(-2n^{3/4}j/n\right)}{\sqrt{1-j/n}} + n^* \exp\left[-2\left(n^{3/4} - \frac{1}{4}\right)\right] \ .$$

(b) En déduire que pour tout entier entier $n \geqslant 1$,

$$v_n \leqslant \sqrt{n} \int_0^1 \frac{\exp\left(-2n^{3/4}x\right)}{\sqrt{1-x}} dx + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) \ .$$

(c) Montrer que lorsque n tend vers l'infini, on a

$$v_n \leqslant \frac{1}{2n^{1/4}}\left(1 + o(1)\right) \ .$$

(d) Montrer qu'en fait, $v_n \sim (2n^{1/4})^{-1}$.