UHCE 254

J. 22 1243

SESSION 2022

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Paris-Saclay – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages, numérotées de 1 à 5.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Les problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

* * *

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

* * *

*Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les $\boxed{\textit{encadrant}}$ ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandée.*

* * *

PROBLÈME A.

On s'intéresse à deux jeux d'apparence similaire.

Premier jeu. On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11 et si elle tombe sur face, on perd 10. On recommence un certain nombre de fois avec des lancés que l'on suppose indépendants.

Pour $i \geq 1$, on note X_i la variable aléatoire égale à 11 si la i-ème pièce tombe sur pile et égale à -10 si elle tombe sur face.

(1) Calculer l'espérance $E[X_i]$ de X_i, pour $i \geq 1$.

On note $S_0 = 100$ le montant initial et S_n le montant obtenu après n lancés.

(2) *(2a)* Pour $n \geq 1$, exprimer S_n en fonction des X_i, $i \geq 1$.

(2b) Calculer la probabilité $P(S_2 = k)$ pour tout entier k.

(2c) Pour $n \geq 0$, calculer l'espérance $E[S_n]$.

(3) *(3a)* Montrer que $P(S_{10} \geq 160) \leq \frac{2}{3}$.

(3b) Montrer que $P\left(S_n \geq 100 + \frac{n}{4}\right) \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

On suppose maintenant qu'on arrête le jeu dès lors que le montant S_n devient inférieur ou égal à 89 ou supérieur ou égal à 105. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de pièces lancées avant l'arrêt du jeu.

(4) *(4a)* Calculer $P(T = 1)$.

(4b) Calculer $P(T = 2)$.

(4c) Si $T \geq 3$, que vaut S_2 ?

(4d) Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant supérieur à 100 sachant que l'on a tiré 3 pièces ou moins ?

(4e) Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant égal à 105 ?

Second jeu. On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11% de notre montant et si elle tombe sur face, on perd 10% de notre montant. On recommence un certain nombre de fois avec des lancés que l'on suppose indépendants. *La différence avec le jeu précédent est que le gain ou la perte sont maintenant des* ***pourcentages*** *du montant.*

Pour $i \geq 1$, on note Y_i la variable aléatoire égale à $1{,}11$ si la i-ème pièce tombe sur pile et égale à $0{,}9$ si elle tombe sur face.

(5) Calculer l'espérance $E[Y_i]$, pour $i \geq 1$.

On note $\Pi_0 = 100$ le montant initial et Π_n le montant obtenu après n lancés.

(6) *(6a)* Pour $n \geq 1$, exprimer Π_n en fonction des Y_i, $i \geq 1$.

(6b) Pour $n \geq 0$, calculer l'espérance $E[\Pi_n]$.

On note $\alpha = -E[\ln(Y_1)]$.

(7) *(7a)* Montrer que $\alpha > 0$.

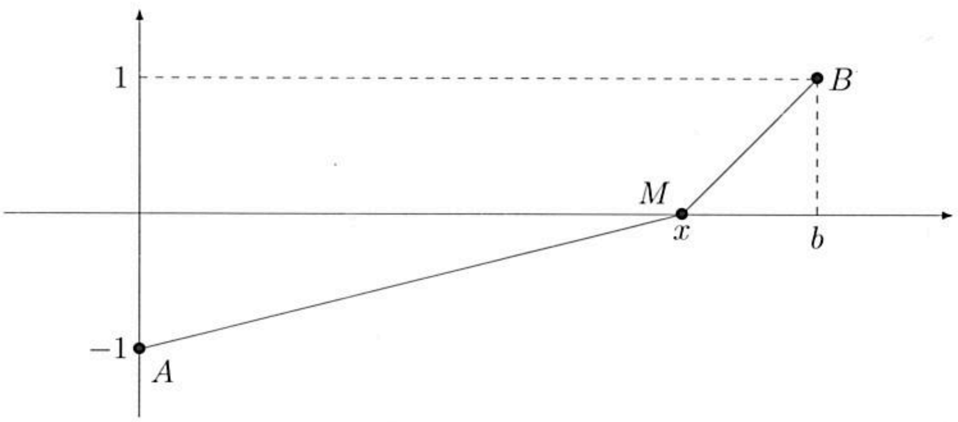
(7b) Montrer que $P\left(\Pi_n \leq 100\, e^{-\frac{\alpha}{2}n}\right) \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

(8) *(8a)* En quoi ce second jeu peut-il paraitre paradoxal ?

(8b) Si vous aviez le choix, préféreriez-vous jouer au premier jeu ou au second ? Justifier brièvement votre réponse.

PROBLÈME B.

Dans le plan muni du repère cartésien habituel, on considère le point A de coordonnées $(0, -1)$ et le point B de coordonnées $(b, 1)$, où $b > 0$ est un réel fixé. On considère également un point sur l'axe des abscisses $M = (x, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$. Ces trois points sont représentés sur la figure ci-dessous.



(9) *(9a)* Quelles sont les longueurs des segments $[AM]$ et $[MB]$?

(9b) Que représente la quantité $L(x) = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + (x - b)^2}$?

(10) On cherche les coordonnées du point d'intersection I entre le segment $[AB]$ et l'axe des abscisses.

(10a) Trouver les réels α et β tels que le graphe de la droite d'équation $d(x) = \alpha x + \beta$ passe par les points A et B.

(10b) En déduire que $I = \left(\frac{b}{2}, 0\right)$.

(11) Où placer le point M sur l'axe des abscisses pour que la longueur $AM + MB$ de la ligne brisée partant de A, passant par M et terminant en B soit la plus courte possible ?

Dans la suite du problème, V est un réel strictement positif et on s'intéresse à la fonction $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie pour $x \in \mathbf{R}$ par

$$T(x) = \frac{1}{V}\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x-b)^2}.$$

(12)(12a) Justifier que T est dérivable sur $\mathbf{R}$.

(12b) Calculer sa dérivée T'.

On admet que la dérivée seconde est donnée par

$$T''(x) = \frac{1}{V(1+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+(x-b)^2)^{3/2}}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

(12c) Montrer que T' est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

(12d) Montrer qu'il existe un unique point $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $T'(x_0) = 0$.

(12e) Montrer que $x_0 \in [0, b]$.

Pour tout $V > 0$, on note $x_0(V)$ l'unique réel dans $[0, b]$ tel que

$$\frac{x_0(V)}{\sqrt{1+x_0(V)^2}} = V\frac{b - x_0(V)}{\sqrt{1+(x_0(V)-b)^2}}.$$

(13)(13a) Justifier que $1 \leq \sqrt{1+x_0(V)^2} \leq \sqrt{1+b^2}$.

(13b) En déduire que $x_0(V) \leq Vb\sqrt{1+b^2}$.

(13c) Montrer que $x_0(V)$ admet une limite lorsque V tend vers 0 et la déterminer.

(13d) Que pensez-vous de $\lim\limits_{V\to+\infty} x_0(V)$? Justifier.

On prolonge la fonction qui à $V \in \mathbf{R}_+^\star$ associe $x_0(V)$ par continuité en 0 et on note encore x_0 la fonction obtenue, définie ainsi de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$.

(14)(14a) Montrer que la fonction x_0 est dérivable en 0 et déterminer la valeur de $x_0'(0)$.

(14b) Donner un développement limité à l'ordre 1 de x_0 au voisinage de 0.

PROBLÈME C.

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1 et $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. On notera M^{T} la matrice transposée d'une matrice M ; la notation usuelle ${}^tM$ est également tolérée mais il convient d'indiquer clairement sur quelle matrice porte la transposition, par exemple en séparant clairement les termes ($M^{\mathrm{T}}\ M$ ou $M\ {}^tM$) ou à l'aide de parenthèses ($(M^{\mathrm{T}})M$ ou $M({}^tM)$).
On considère les deux propriétés suivantes pour des matrices.

Propriété O. On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ *vérifie la propriété* **O** si ses colonnes, notées $C_1, \ldots, C_n$, sont deux à deux orthogonales, c'est-à-dire

$$C_i^{\mathrm{T}}\, C_j = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}\, m_{k,j} = 0 \qquad \text{pour tout } i \neq j\,.$$

Propriété I. On dit qu'une matrice $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ *vérifie la propriété* **I** si $M^{\mathrm{T}}\, M = I_n$, où I_n est la matrice identité de $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ qui a des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

(15) On considère la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(15a) La matrice G vérifie-t-elle la propriété **O** ? La propriété **I** ?

(15b) Déterminer le noyau de G.

(15c) Soit λ un réel non nul. Montrer que λ est une valeur propre de G si et seulement si λ est valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(15d) Quelles sont les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

(15e) La matrice G est-elle diagonalisable ?

Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. On note $C_1, \ldots, C_n$ ses colonnes.

(16) Montrer que le coefficient d'indices i et j de $M^{\mathrm{T}}\, M$ est $(M^{\mathrm{T}}\, M)_{ij} = C_i^{\mathrm{T}}\, C_j$.

(17) **Dans cette question**, on suppose que la matrice M vérifie la propriété **O**.

(17a) Montrer que la matrice $M^{\mathrm{T}}\, M$ est diagonale.

(17b) Montrer que les coefficients diagonaux de $M^{\mathrm{T}}\, M$ sont positifs ou nuls.

(17c) Si $(M^{\mathrm{T}}M)_{jj}$ est nul, que peut-on en déduire sur C_j ?

(17d) Montrer que M est inversible si et seulement si aucune de ses colonnes n'est entièrement remplie de 0.

(18) **Dans cette question**, on suppose que la matrice M vérifie la propriété **I**.

(18a) Montrer que M est inversible.

(18b) Soit $P \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice vérifiant aussi la propriété **I**. Montrer que $P^{\mathrm{T}}MP$ vérifie la propriété **I**.

On suppose désormais que $n = 3$. On note $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire de u avec v et on rappelle que la norme est donnée par $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.
On fixe un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbf{R}^3$ tel que $x_3 \neq 0$, ainsi qu'un vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)$ de même norme que x et non colinéaire à x. On définit

$$z = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

(19) On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$.

(19a) Montrer que $\|z\| = 0$ si et seulement si $A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(19b) Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(19c) En déduire que la dimension du noyau de l'application linéaire représentée par A est inférieure ou égale à 1.

(19d) Montrer que $z \neq (0, 0, 0)$.

(20)(20a) Montrer que $\langle x, z \rangle = 0$ et $\langle y, z \rangle = 0$, puis que $\langle x + y, z \rangle = 0$ et $\langle x - y, z \rangle = 0$.

(20b) Montrer que la famille $(x + y, x - y, z)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

(21) On définit l'application linéaire $\ell : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ par $\ell(x + y) = x + y$, $\ell(x - y) = y - x$ et $\ell(z) = z$.

(21a) Quelle est la matrice de ℓ dans la base $\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}, \frac{x-y}{\|x-y\|}, \frac{z}{\|z\|} \right)$? On notera L cette matrice.

On note $P = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + y_1}{\|x+y\|} & \frac{x_1 - y_1}{\|x-y\|} & \frac{z_1}{\|z\|} \\ \frac{x_2 + y_2}{\|x+y\|} & \frac{x_2 - y_2}{\|x-y\|} & \frac{z_2}{\|z\|} \\ \frac{x_3 + y_3}{\|x+y\|} & \frac{x_3 - y_3}{\|x-y\|} & \frac{z_3}{\|z\|} \end{pmatrix}$.

(21b) Exprimer la matrice de ℓ dans la base canonique comme un produit de matrices.

(22) Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ qui vérifie la propriété **I**, et telle que $M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.